Álgebra II

Primer Cuatrimestre — 2016

Práctica 3: Anillos

Ejemplos y construcciones

1. Probar que los siguientes conjuntos son anillos con las operaciones indicadas. Decidir en cada caso si son conmutativos, íntegros, de división, cuerpos, etc.

(*a*) $M_8(\mathbb{R})$ con el producto y la suma de matrices.

(*b*) $\mathbb{Z}_{12}[X]$ con el producto usual de polinomios.

(*c*) $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ donde $d \in \mathbb{Z}$ es libre de cuadrados, con la suma y el producto de números complejos.

(*d*) $\mathcal{C}^6(0,1) = \{f : (0,1) \to \mathbb{R} \mid$ las primeras 6 derivadas de f existen y son continuas$\}$, con la suma y el producto usual de funciones.

(*e*) $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$, con el producto y la suma de matrices.

2. Si A es un grupo abeliano entonces $\operatorname{End} A$, el conjunto de endomorfismos de grupo de A, es un anillo con la suma habitual de funciones y la composición como producto. Encontrar descripciones explícitas para este anillo cuando A es $\mathbb{Z}^n$ o $\mathbb{Z}_n$.

3. (*a*) Sean A un anillo y $\mathcal{C}$ una familia de subanillos de A. Mostrar que $B = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$ es un subanillo de A.

(*b*) Sean A un anillo, $B \subseteq A$ un subanillo y $X \subseteq A$. Mostrar que existe un subanillo $B[X]$ de A que contiene a X y a B y tal que cualquier otro subanillo de A que contiene a B y a X contiene a $B[X]$.

(*c*) Sea η una raíz primitiva sexta de la unidad y ω una raíz primitiva p-ésima de la unidad, donde p es algún número primo. Describir explícitamente $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{5}]$, $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}[\eta]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{6}, \sqrt{p}]$ y $\mathbb{Z}[\omega]$ como subanillos de $\mathbb{C}$.

4. *Anillos de matrices.* Sean A un anillo y $n \in \mathbb{N}$. Probar que el conjunto de matrices $M_n(A)$ con coeficientes en A es un anillo con respecto a las operaciones usuales de suma y producto de matrices. Probar que si $n > 1$, entonces $M_n(A)$ no es conmutativo.

5. *Anillos de funciones.* Sean A un anillo y X un conjunto no vacío. Sea A^X el conjunto de todas las funciones $X \to A$. Definimos operaciones $+, \cdot : A^X \times A^X \to A^X$ de la siguiente manera: dadas $f, g \in A^X$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{para todo } x \in X,$$

y

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) \qquad \text{para todo } x \in X.$$

Mostrar que $(A^X, +, \cdot)$ es un anillo. ¿Cuándo es conmutativo?

6. *Anillos de polinomios.* Sea A un anillo, y sea

$$S = \{f : \mathbb{N}_0 \to A \mid \text{existe un conjunto finito } T \subset \mathbb{N}_0 \text{ tal que } f|_{T^c} \equiv 0\}.$$

Definimos operaciones de suma y producto $+, \cdot : S \times S \to S$ de la siguiente manera: para cada $f, g \in S$ y cada $n \in \mathbb{N}_0$,

$$(f+g)(n) = f(n) + g(n)$$

y

$$(f \cdot g)(n) = \sum_{\substack{k,l \geq 0 \\ k+l=n}} f(k)g(l).$$

Mostrar que estas operaciones están bien definidas y que $(S, +, \cdot)$ es un anillo.

Sea X una variable formal. Si $f \in S$ y $T \subset \mathbb{N}$ es tal que $f|_{T^c} \equiv 0$, podemos representar a f por la suma finita formal

$$\sum_{n \in T} f(n)X^n.$$

Con esta notación, las operaciones de S imitan formalmente las correspondientes operaciones entre polinomios. Llamamos a S el *anillo de polinomios con coeficientes en A* y lo notamos $A[X]$.

7. *Anillos de series formales.* Sea A un anillo.

(a) Sea $S = \{f : \mathbb{N}_0 \to A\}$ el conjunto de todas las funciones de $\mathbb{N}_0$ a A. Definimos operaciones $+, \cdot : S \times S \to S$ de la siguiente manera: para cada $f, g \in S$ y cada $n \in \mathbb{N}_0$,

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n)$$

y

$$(f \cdot g)(n) = \sum_{\substack{k,l \geq 0 \\ k+l=n}} f(k)g(l).$$

Mostrar que $(S, +, \cdot)$ es un anillo.

Sea X una variable formal. Podemos representar a una función $f \in S$ por una serie

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)X^n.$$

Usando esta notación, las definiciones de la suma y el producto de S imitan formalmente a las correspondientes operaciones con las series. Llamamos a S el *anillo de series formales de potencias con coeficientes en A*, y lo notamos $A[\![X]\!]$.

(b) Probar que la función representada por la serie $1 - X$ es inversible en $A[\![X]\!]$.

(c) Tomamos ahora $A = \mathbb{R}$ y sea $\mathbb{R}\{\!\{X\}\!\} \subset \mathbb{R}[\![X]\!]$ el subconjunto de las series formales que tienen radio de convergencia positivo. Mostrar que se trata de un subanillo.

8. *Anillo de grupo.* Sean G un grupo y A un anillo.

(a) Sea $A[G]$ el conjunto de todas las funciones $f : G \to A$ tales que

$$|\{g \in G : f(g) \neq 0\}| < \infty.$$

Definimos operaciones $+, \cdot : A[G] \times A[G] \to A[G]$ de la siguiente manera: para cada $s, t \in A[G]$ y cada $g \in G$,

$$(s + t)(g) = s(g) + t(g)$$

y

$$(s \cdot t)(g) = \sum_{h \in G} s(gh^{-1})t(h).$$

Mostrar que $(A[G], +, \cdot)$ es un anillo.

(b) Supongamos desde ahora que $A = \mathbb{k}$ es un cuerpo. Mostrar que $\mathbb{k}[G]$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial $\mathbb{k}^G$ de todas las funciones $G \to \mathbb{k}$.

(c) Dado $g \in G$, sea $\hat{g} : G \to \Bbbk$ la función definida por

$$\hat{g}(h) = \begin{cases} 1, & \text{si } g = h; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Mostrar que $\{\hat{g} : g \in G\}$ es una base de $\Bbbk[G]$. En particular, todo elemento $f \in \Bbbk[G]$ puede escribirse como

$$f = \sum_{g \in G} \alpha_g \, \hat{g}$$

con coeficientes $\alpha_g \in \Bbbk$ casi todos nulos.

(d) Mostrar que si $g, h \in G$, entonces $\hat{g} \cdot \hat{h} = \widehat{gh}$.

†(e) Describir el centro de $\Bbbk[G]$ cuando G es finito. ¿Qué pasa cuando G es infinito?

†**9.** *Álgebras de caminos.*

(a) Un *carcaj* Q es una 4-upla (Q_0, Q_1, s, t) en la que:

- Q_0 y Q_1 son conjuntos. Los elementos de Q_0 son los *vértices* de Q y los de Q_1 las *flechas*.
- s y t son funciones $Q_1 \to Q_0$. Si $\alpha \in Q_1$ es una flecha, decimos que $s(\alpha)$ es el *origen* de α y que $t(\alpha)$ es su final.

Por ejemplo, obtenemos un carcaj si ponemos $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ con $Q_0 = \{1, 2, 3, 4\}$, $Q_1 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \rho\}$ y s y t están dadas por la tabla siguiente:

	α	β	γ	δ	η	ρ
s	1	2	2	2	3	3
t	2	3	3	4	3	1

Podemos describir este carcaj más eficientemente dando el siguiente dibujo:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, shift left, "\beta"] \arrow[r, shift right, "\gamma"'] \arrow[d, "\delta"'] & 3 \arrow[ll, bend right, "\rho"'] \arrow[loop right, "\eta"] \\
 & 4 &
\end{tikzcd}$$

Fijemos un carcaj Q. Si $x, y \in Q_0$, un *camino de x a y en Q* es una secuencia finita $\kappa = (x; \alpha_1, \ldots, \alpha_n; y)$ de flechas de Q tal que $s(\alpha_1) = x$, $t(\alpha_n) = y$ y para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ se tiene que $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$. El número n es la *longitud* de κ. En particular, si $x \in Q_0$, hay un camino $(x; ; x)$ de x a x de longitud 0.

Sea $P(Q)$ el conjunto de todos los caminos de Q, sea $\Bbbk$ un cuerpo y sea $\Bbbk Q$ el espacio vectorial que tiene a $P(Q)$ como base. Un elemento $u \in \Bbbk Q$ es una combinación lineal finita de caminos de Q con coeficientes en $\Bbbk$:

$$u = \sum_{\kappa \in P(Q)} a_\kappa \kappa.$$

Definimos un producto asociativo bilineal $\cdot : \Bbbk Q \times \Bbbk Q \to \Bbbk Q$ de la siguiente manera: para cada par de caminos $\kappa = (x; \alpha_1, \ldots, \alpha_n; y)$ y $\zeta = (z; \beta_1, \ldots, \beta_m; w)$ en Q,

$$\kappa \cdot \zeta = \begin{cases} (x; \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m; w), & \text{si } y = z; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Mostrar que con este producto $\Bbbk Q$ es una $\Bbbk$-álgebra si y solo si Q_0 es finito. ¿Cuál es la unidad de $\Bbbk Q$? Llamamos a $\Bbbk Q$ el *álgebra de caminos de Q sobre $\Bbbk$*.

(*b*) Sean Q y Q' como en la figura. Probar que $\Bbbk Q = \Bbbk$ y $\Bbbk Q'$ es isomorfo a $\Bbbk[X]$.

$$Q: \quad \bullet \qquad\qquad\qquad Q': \quad \bullet \circlearrowleft$$

(*c*) $\Bbbk$-*álgebras libres.* Sea X un conjunto y sea Q el carcaj (Q_0, Q_1, s, t) en el que Q_0 tiene un único elemento p, $Q_1 = X$ y s, $t : Q_1 \to Q_0$ son las funciones evidentes. Escribimos $L(X)$ en vez de $\Bbbk Q$. Encontrar una base de $L(X)$ y describir el producto de esta álgebra.

(*d*) ¿Cuándo es $\Bbbk Q$ un dominio de integridad? ¿Cuándo tiene dimensión finita? ¿Cuándo es conmutativa?

(*e*) Describir el centro de $\Bbbk Q$.

(*f*) Considerar el carcaj Q de n vértices de la figura:

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \quad \cdots \quad \longrightarrow n-1 \longrightarrow n$$

Mostrar que $\Bbbk Q$ es isomorfo al anillo de matrices triangulares superiores de $M_n(\Bbbk)$.

†**10.** *El álgebra de Weyl.* Sea $\mathsf{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X])$ el anillo de endomorfismos de $\mathbb{C}[X]$ considerado como $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Sean $p, q \in \mathsf{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X])$ definidos de la siguiente manera: si $f \in \mathbb{C}[X]$, entonces

$$p(f) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X}, \qquad \text{y} \qquad q(f) = Xf.$$

Sea $A = \mathbb{C}[p, q]$ el menor subanillo de $\mathsf{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X])$ que contiene a $\mathbb{C}$, a p y a q. Llamamos a A el *álgebra de Weyl.*

(*a*) Probar que $pq - qp = 1$.

(*b*) Probar que A es una $\mathbb{C}$-álgebra de dimensión infinita sobre $\mathbb{C}$, y que $\{p^i q^j : i, j \in \mathbb{N}_0\}$ es una base.

(*c*) Describir el centro de A.

(*d*) Mostrar que A no posee divisores de cero y describir el conjunto de sus unidades.

11. *Anillo opuesto.*

(*a*) Sea A un anillo. Sea $* : A \times A \to A$ la operación definida por

$$a * b = ba, \qquad \forall a, b \in A.$$

Probar que $(A, +, *)$ es un anillo. Se trata del *anillo opuesto de A*, que escribimos habitualmente A^{op}.

(*b*) Mostrar con un ejemplo que en general $A \ncong A^{\mathrm{op}}$.

12. Un cuadrado mágico es una matriz cuadrada con entradas enteras, tal que la suma de los elementos de cualquier fila o columna es igual a la suma de los elementos de cualquier otra fila o columna. Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$ los cuadrados mágicos de tamaño n forman un subanillo de $M_n(\mathbb{R})$.

13. Sea X un conjunto. Mostrar que $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ es un anillo. Aquí $\triangle$ es la operación diferencia simétrica.

14. Sea A un anillo. Probar las siguientes afirmaciones.

(*a*) Si cada elemento de A tiene inverso a izquierda entonces A es un anillo de división.

(*b*) Sea $a \in A$. Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que a^n es inversible, entonces a es inversible.

15. *Idempotentes.* Sea A un anillo. Un elemento $e \in A$ es *idempotente* si $e^2 = e$. Probar las siguientes afirmaciones.

(*a*) Si $e \in A$ es idempotente, el subconjunto eAe con las operaciones de A restringidas es un anillo. Se trata de un subanillo de A si y solo si $e = 1$.

(*b*) Si $e \in A$ es idempotente, entonces $1 - e$ también lo es.

(*c*) Sea G un grupo finito y sea $\Bbbk$ un cuerpo en el que $|G| \neq 0$. Probar que

$$e = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g$$

es un idempotente en $\Bbbk[G]$.

†**16.** *Anillos booleanos.* Un anillo A es *booleano* si todos sus elementos son idempotentes.

(*a*) Probar que si X es un conjunto, entonces el anillo $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ es booleano.

(*b*) Probar que un anillo booleano es conmutativo.

Morfismos, ideales y cocientes

En toda esta sección A y B son anillos. Denotamos $\mathsf{Hom}(A, B)$ al conjunto de morfismos de anillos $A \to B$.

17. (*a*) Mostrar que hay exactamente un morfismo de anillos $\mathbb{Z} \to A$.

(*b*) Mostrar que hay a lo sumo un morfismo de anillos $\mathbb{Q} \to A$ y que puede no haber ninguno.

18. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un morfismo de anillos. Probar las siguientes afirmaciones.

(*a*) $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$, y de hecho $f|_{\mathbb{Q}} = \mathsf{id}_{\mathbb{Q}}$.

(*b*) La aplicación f es estrictamente creciente.

Concluir que $f = \mathsf{id}_{\mathbb{R}}$.

19. Sea $\Bbbk$ un cuerpo. Decidir en cada caso si existe un morfismo de anillos $f : A \to B$:

(*a*) $A = \mathbb{Z}[i]$ y $B = \mathbb{R}$;

(*b*) $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ y $B = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$;

(*c*) $A = \Bbbk$ y $B = M_n(\Bbbk)$;

(*d*) $A = M_n(\Bbbk)$ y $B = \Bbbk$.

20. Sea A un anillo. El *grupo de unidades de* A es el conjunto

$$\mathcal{U}(A) = \{a \in A \mid a \text{ es inversible}\}$$

con la multiplicación de A.

(*a*) Probar que $\mathcal{U}(A)$ es un grupo.

(*b*) Hallar las unidades de $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

(*c*) Probar que $\mathcal{U}(A[X]) = \mathcal{U}(A)$.

(*d*) Sea G un grupo. Probar que $1 \cdot G \subseteq \mathcal{U}(\mathbb{Z}[G])$ pero que no vale la igualdad.

21. Probar que si G es un grupo, la aplicación

$$\begin{aligned} \mathsf{Hom}(\mathbb{Z}[G], A) &\to \mathsf{Hom}_{\mathrm{Grp}}(G, \mathcal{U}(A)) \\ f &\mapsto f|_G \end{aligned}$$

es una biyección.

22. Sea $\mathcal{I}$ una familia de ideales a izquierda (a derecha, biláteros) de A.

(*a*) Mostrar que $\bigcap_{I \in \mathcal{I}} I$ es un ideal a izquierda (a derecha, bilatéro) de A. Se trata del ideal más grande contenido en todos los ideales de $\mathcal{I}$.

(*b*) Mostrar que $\sum_{I \in \mathcal{I}} I$ es un ideal a izquierda (a derecha, bilátero) de A. Se trata del ideal más chico que contiene a todos los ideales de $\mathcal{I}$.

23. Sea $I \subseteq A$ un ideal bilátero. Sea J el ideal generado por I en $A[X]$. Mostrar que $A[X]/J \cong (A/I)[X]$.

24. *Ideales biláteros de $M_n(A)$.*

(a) Sean $I \subseteq A$ un ideal bilátero y $n \in \mathbb{N}$. Sea $M_n(I) \subseteq M_n(A)$ el subconjunto de las matrices de $M_n(A)$ que tienen todos sus coeficientes en I. Mostrar que $M_n(I)$ es un ideal bilátero de $M_n(A)$ y que $M_n(A)/M_n(I) \cong M_n(A/I)$.

(b) Probar que si $J \subseteq M_n(A)$ es un ideal bilátero, entonces existe un ideal bilátero $I \subseteq A$ tal que $J = M_n(I)$.

Sugerencia. Tomar $I = \{a \in A \mid a = M_{1,1} \text{ para alguna matriz } M \in J\}$.

(c) Probar que si $\Bbbk$ es un cuerpo, entonces $M_n(\Bbbk)$ es simple –es decir que los únicos ideales biláteros de $M_n(\Bbbk)$ son 0 y $M_n(\Bbbk)$.

25. *Ideales a izquierda de $M_n(\Bbbk)$.* Sea $\Bbbk$ un cuerpo.

(a) Sean $V \subseteq \Bbbk^n$ un subespacio vectorial e I_V el subconjunto de $M_n(\Bbbk)$ formado por todas las matrices cuyas filas pertenecen a V. Probar que I_V es un ideal a izquierda de $M_n(k)$.

(b) Probar que todo ideal a izquierda de $M_n(\Bbbk)$ es de la forma I_V para algún subespacio $V \subseteq \Bbbk^n$.

Sugerencia. Llamar V al conjunto formado por las todas filas de todas las matrices del ideal y probar que es un subespacio.

26. Probar que $\mathsf{Z}(M_n(A)) = \mathsf{Z}(A) \cdot \mathsf{id}$.

27. Sea $\Bbbk$ un cuerpo. Sean G un grupo y $H \trianglelefteq G$ un subgrupo normal, y consideremos la proyección canónica $\pi : G \to G/H$. Mostrar que π determina un morfismo sobreyectivo de anillos $\Bbbk[\pi] : \Bbbk[G] \to \Bbbk[G/H]$. Describir el núcleo de $\Bbbk[\pi]$.

Anillos conmutativos

En esta sección A es un anillo conmutativo.

28. Mostrar que A es un cuerpo sii los únicos ideales de A son 0 y A.

29. (a) Sea $a \in A$ un elemento que no es inversible. Mostrar que existe un ideal maximal $\mathfrak{m} \subseteq A$ tal que $a \in \mathfrak{m}$.

(b) Sea $I \subsetneq A$. Mostrar que existe un ideal maximal $\mathfrak{m} \subseteq A$ tal que $I \subseteq \mathfrak{m}$.

Definición. *Decimos que un ideal $\mathfrak{p} \subsetneq A$ es* primo *si*

$$ab \in \mathfrak{p} \implies a \in p \vee b \in p.$$

Notamos por $\mathsf{Spec}\, A$ *al conjunto de todos los ideales primos de A.*

30. Probar las siguientes afirmaciones.

(a) Un ideal $\mathfrak{p} \subsetneq A$ es primo sii $A/\mathfrak{p}$ es un dominio de integridad.

(b) Un ideal maximal de A es primo.

31. Determinar $\mathsf{Spec}\, \mathbb{Z}$. Identificar qué ideales primos de $\mathbb{Z}$ son maximales.

32. Sea $\Bbbk$ un cuerpo. Mostrar que si $\mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\, \Bbbk[X]$, entonces existe un único $f \in \mathfrak{p}$ mónico e irreducible tal que $\mathfrak{p} = (f)$. Recíprocamente, probar que todo ideal principal generado por un polinomio mónico e irreducible es primo en $\Bbbk[X]$.

33. (a) Sea $f : A \to B$ un morfismo de anillos. Probar que si $\mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\, B$, entonces $f^{-1}(\mathfrak{p}) \in \mathsf{Spec}\, A$. En particular, si $A \subseteq B$ es un subanillo y $\mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\, B$, entonces $\mathfrak{p} \cap A \in \mathsf{Spec}\, A$.

(b) Sea $I \subseteq A$ un ideal. Probar que la correspondencia entre ideales de A que contienen a I e ideales de A/I se restringe a una correspondencia entre los ideales primos de A que contienen a I y los ideales primos de A/I.

34. Mostrar que todo ideal primo no nulo de $\mathbb{Z}[X]$ es de alguna de las siguientes formas:

(a) (p), con $p \in \mathbb{N}$ primo;

(*b*) (f), con $f \in \mathbb{Z}[X]$ un polinomio mónico irreducible;

(*c*) (p, f), con p primo y f irreducible en $\mathbb{Z}_p[X]$.

Sugerencia. Sea $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[X]$. Mostrar que si $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} \neq \{0\}$ entonces es un ideal principal de $\mathbb{Z}$ generado por un número primo p, así que en particular $(p) \subseteq \mathfrak{p}$. Considerar ahora el ideal $\mathfrak{p}/(p)$ de $\mathbb{Z}[X]/(p) \cong \mathbb{Z}_p[X]$ y usar un ejercicio anterior que describe los ideales primos de este anillo.

35. *Nilradical.* Un elemento $a \in A$ es *nilpotente* si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$. El *nilradical de* A es el conjunto $\operatorname{nil}(A) = \{a \in A : a \text{ es nilpotente}\}$. Probar las siguientes afirmaciones:

(*a*) $\operatorname{nil}(A)$ es un ideal de A;

(*b*) $\operatorname{nil}(A/\operatorname{nil}(A)) = 0$;

(*c*) $\operatorname{nil}(A) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A} \mathfrak{p}$;

(*d*) si $x \in \operatorname{nil}(A)$, entonces $1 + x$ es inversible.

36. *Radical de Jacobson.* El *radical de Jacobson de* A es la intersección de todos los ideales maximales de A, y se nota $J(A)$. Mostrar que $x \in J(A)$ sii para cada $y \in A$ se tiene que $1 - xy$ es inversible.