
ÁLGEBRA II

Primer Cuatrimestre — 2016

Práctica 2: Grupos - Segunda parte

Productos directos y semidirectos

1. Sea G un grupo y sean H y K dos subgrupos de G . Probar que son equivalentes:
 - (a) Todo elemento de G se escribe de manera única como un producto hk con $h \in H$ y $k \in K$.
 - (b) $G = HK$ y $H \cap K = 1$.
2. Sean G y H dos grupos. Determinar $Z(G \times H)$.
3. Sean $m, n \in \mathbb{Z}$ coprimos y sea G un grupo de orden mn . Probar que si G posee exactamente un subgrupo N de orden n y exactamente un subgrupo M de orden m , entonces G es isomorfo al producto directo de N y M .
4. Probar que:
 - (a) $\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ si m y n son coprimos (Teorema chino del resto);
 - (b) $\mathbb{C}^\times \cong \mathbb{R}_{>0} \times S^1$;
 - (c) $D_6 \cong S_3 \times \mathbb{Z}_2$.
5. Sean $f : H \rightarrow H'$ y $g : K \rightarrow K'$ dos morfismos de grupos. Probar que la función $f \times g : H \times K \rightarrow H' \times K'$ definida por $(h, k) \mapsto (f(h), g(k))$ es un morfismo de grupos.
6. Sean H y K dos grupos y sean $S \trianglelefteq H$ y $T \trianglelefteq K$. Probar que $S \times T \trianglelefteq H \times K$ y que

$$\frac{H \times K}{S \times T} \cong (H/S) \times (K/T).$$

Sugerencia. Sean $\pi_S : H \rightarrow H/S$ y $\pi_T : K \rightarrow K/T$ las proyecciones. Considerar $\pi_S \times \pi_T$ y usar el 1^{er} teorema de isomorfismo.

7. *Producto semidirecto.* Sean H y K grupos y sea $\theta : K \rightarrow \text{Aut}(H)$ un morfismo de grupos.
 - (a) Sea $G = H \times K$ como conjunto, y consideremos el producto en G dado por

$$(h, k) \cdot (h', k') = (h\theta(k)(h'), kk'), \quad \forall (h, k), (h', k') \in G.$$

Mostrar que, con respecto a este producto, G es un grupo. Llamamos a este grupo el *producto semidirecto (o cruzado) de H por K con respecto a θ* y lo notamos $H \rtimes_\theta K$.

- (b) Sean $\tilde{H} = \{(h, 1) \in H \rtimes_\theta K \mid h \in H\}$ y $\tilde{K} = \{(1, k) \in H \rtimes_\theta K \mid k \in K\}$. Probar que \tilde{H} y \tilde{K} son subgrupos de $H \rtimes_\theta K$ tales que $\tilde{H} \trianglelefteq H \rtimes_\theta K$, $\tilde{H} \cap \tilde{K} = 1$ y $\tilde{H}\tilde{K} = H \rtimes_\theta K$.
- (c) Mostrar que si $\theta = 1$ es el morfismo trivial, $H \rtimes_\theta K = H \times K$ es simplemente el producto directo.

Definición. Sea G un grupo y sean H y K subgrupos de G . Decimos que G es el producto semidirecto interno de H por K si $H \trianglelefteq G$, $H \cap K = 1$ y $HK = G$.

8. Sea G un grupo y sean H y K subgrupos de G tales que G es el producto semidirecto interno de H por K .
 - (a) Probar que la fórmula $\theta(k)(h) = khk^{-1}$ define un morfismo de grupos $\theta : K \rightarrow \text{Aut}(H)$.
 - (b) Probar que la fórmula $(h, k) \mapsto hk$ define un isomorfismo de grupos $H \rtimes_\theta K \xrightarrow{\cong} G$.
9. Mostrar que S_n es el producto semidirecto de A_n por $\langle (12) \rangle$.

10. Probar que $GL_n(k)$ es un producto semidirecto de $SL_n(k)$ por k^\times .
11. Mostrar que \mathbb{H} no puede ser escrito como un producto semidirecto de forma no trivial.
12. Sean G y N dos grupos y sean $\theta, \tau : G \rightarrow \text{Aut}(N)$ morfismos. Probar que si existe $\varphi \in \text{Aut}(G)$ tal que $\theta = \tau \circ \varphi$, entonces $N \rtimes_\theta G \cong N \rtimes_\tau G$.

Acciones de grupos

En todos los ejercicios las acciones son a izquierda.

13. Sean G un grupo, $r \in \mathbb{N}$ y X el conjunto de todos los subgrupos de G de orden r . Probar que la siguiente fórmula define una acción de G en X : $g \cdot H = gHg^{-1}$.
14. Sean G un grupo, $H \leq G$ y $X = G/H$. Probar que la siguiente fórmula define una acción de G en X : $g \cdot xH = (gx)H$.
15. Sea G un grupo finito y sean H y K subgrupos de G . Sea $X = HK$.
- (a) Probar que la siguiente fórmula define una acción de $H \times K$ en X : $(h, k) \cdot x = hxk^{-1}$.
- (b) Probar que $\mathcal{O}(1) = X$ y probar que el estabilizador del 1 es isomorfo a $H \cap K$.
- (c) Deducir de lo anterior que $|H||K| = |HK||H \cap K|$.
16. *Subgrupos grandes*. El objetivo de este ejercicio es probar el siguiente resultado.

Proposición. *Sea G un grupo finito, sea p el menor número primo que divide a $|G|$, y sea H un subgrupo de G de índice p . Entonces H es normal en G .*

- (a) Sea $X = G/H = \{gH : g \in G\}$ el conjunto de coclases a izquierda de H en G ; notar que $|X| = p$. Consideramos en X la acción usual de G por multiplicación a izquierda,

$$\alpha : G \times X \rightarrow X, \quad (g', gH) \mapsto g'gH.$$

Sea $\tilde{\alpha} : G \rightarrow S_X$ el morfismo de grupos correspondiente y sea $K = \ker(\tilde{\alpha})$. Mostrar que $H \supseteq K$ y deducir que $|G : K|$ divide a $p!$.

- (b) Mostrar que $|G : K| = |G : H|$. Concluir que $H = K$ y por lo tanto H es normal.

Sugerencia. Para hacerlo, observar primero que $p = |G : H| \leq |G : K|$, de manera que $|G : K| \neq 1$. Si q es un primo que divide a $|G : K|$, lo hecho en la parte anterior implica que $q \leq p$; esto junto con la elección de p implica que $|G : K| = p^r$ para algún $r \geq 1$. Para terminar, mostrar que $r = 1$.

p -Grupos

En toda esta sección $p \in \mathbb{N}$ es un número primo.

Definición. *Sea G un grupo. Un elemento de G se dice p -primario si su orden es una potencia de p . Un p -grupo es un grupo tal que todo elemento es p -primario.*

17. Probar las siguientes afirmaciones.
- (a) Si G es un p -grupo y H es un subgrupo de G , entonces H es un p -grupo.
- (b) Si G es un p -grupo y $f : G \rightarrow H$ es un morfismo sobreyectivo, entonces H es un p -grupo.
- (c) Si G es un grupo, H un subgrupo normal de G y tanto H como G/H son p -grupos, entonces G es un p -grupo.
18. Un grupo finito G es un p -grupo sii $|G| = p^r$ para algún $r \geq 1$.
19. Sea G un p -grupo finito. Probar que G tiene centro no trivial.

Teoremas de Sylow

20. Hallar todos los subgrupos de Sylow de D_n .
21. Mostrar que no hay grupos simples de orden 28 ó 312.
22. Mostrar que un grupo de orden 12 ó 56 no es simple.
23. Probar que todo grupo de orden 5.7.17 es cíclico.
24. Probar que si p y q son primos distintos entonces un grupo de orden pq no es simple.
25. Sea G un grupo de orden $p^r m$, con $r \geq 1$ y $p > m$. Probar que G no es simple.
26. Sea G un grupo de orden $p^2 q$ con p y q primos distintos. Probar que G no es simple.
27. Probar que si todos los subgrupos de Sylow de un grupo finito G son normales, entonces $G \cong \prod_{p \text{ primo}} S_p$ donde S_p el (único) p -subgrupo de Sylow de G . En particular, un grupo abeliano finito es producto de sus subgrupos de Sylow.