Álgebra II
Primer Cuatrimestre — 2016
Práctica 1: Grupos - Primera parte

Notaciones usuales

$\mathbb{Z}_n$	Enteros módulo n
D_n	Grupo diedral de orden $2n$
$\mathbb{H} = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$	Grupo de cuaterniones

Definiciones y ejemplos

1. Probar que los siguientes conjuntos son grupos abelianos con el producto de números complejos. Determinar cuáles de ellos son cíclicos.

(a) $\mathbb{G}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$;

(b) $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$;

(c) $\mathbb{G}_{p^\infty} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{G}_{p^n}$ donde p es un número primo.

2. Sean $\Bbbk$ un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$. Se definen:

$$\mathsf{GL}_n(\Bbbk) = \{A \in M_n(\Bbbk) \mid \det A \neq 0\}$$
$$\mathsf{SL}_n(\Bbbk) = \{A \in M_n(\Bbbk) \mid \det A = 1\}$$

Probar que, dotados de la multiplicación usual de matrices, estos dos conjuntos resultan ser grupos. Describirlos para $n = 1$. ¿Cuándo son abelianos?

3. *Grupo opuesto.* Sea $(G, \star)$ un grupo. El *grupo opuesto* de G es el conjunto $G^{\mathrm{op}} = G$ con la operación $\star_{\mathrm{op}}$ dada por:

$$\star_{\mathrm{op}} : (g, h) \in G^{\mathrm{op}} \times G^{\mathrm{op}} \mapsto h \star g \in G^{\mathrm{op}}$$

Probar que $(G^{\mathrm{op}}, \star_{\mathrm{op}})$ es un grupo.

4. Sea G un grupo tal que $g^2 = 1$ para todo $g \in G$. Probar que G es abeliano.

5. Sean G un grupo, X un conjunto y G^X el conjunto de todas las funciones $f : X \to G$. Dotamos a G^X del producto $\star$ dado por $(f \star g)(x) = f(x)g(x)$ para todo $x \in X$. Probar que $(G^X, \star)$ es un grupo. ¿Cuándo es abeliano?

6. *Producto directo.* Sean G y H grupos. El *producto directo* de G y H es el conjunto $G \times H$ con la operación dada por:

$$\big((g_1, h_1), (g_2, h_2)\big) \in (G \times H) \times (G \times H) \mapsto (g_1 g_2, h_1 h_2) \in G \times H$$

Probar que $G \times H$ es un grupo. Probar que $G \times H$ es abeliano sii G y H son abelianos.

Subgrupos

7. Sean G un grupo y $H \subseteq G$ un subconjunto. Probar que son equivalentes:

(a) H es un subgrupo de G;

(b) H es no vacío y dados $x, y \in H$ el elemento xy^{-1} pertenece a H.

Si además H es finito, estas afirmaciones son equivalentes a:

(c) H es no vacío y dados $x, y \in H$ el elemento xy pertenece a H.

Dar un contraejemplo para esta última equivalencia cuando H es infinito.

8. Sean G un grupo y H_1 y H_2 subgrupos de G. Probar las siguientes afirmaciones.

(a) $H_1 \cap H_2$ es un subgrupo de G.

(b) $H_1 \cup H_2$ es un subgrupo de G sii $H_1 \subseteq H_2$ o $H_2 \subseteq H_1$.

9. Dado un grupo G, ¿es el subconjunto de elementos de orden finito un subgrupo de G?

10. Sean G y H grupos y $g \in G$ y $h \in H$ elementos de orden finito. Probar que el orden de (g, h) en $G \times H$ es el mínimo común múltiplo de $\operatorname{ord}(g)$ y $\operatorname{ord}(h)$.

11. Sean G un grupo, $g \in G$ un elemento de orden finito y $m \in \mathbb{N}$. Calcular $\operatorname{ord}(g^m)$.

12. Sea G un grupo.

(a) Sea $\mathcal{H}$ una familia de subgrupos de G. Probar que $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$ es un subgrupo de G.

(b) Sea ahora $X \subseteq G$ un subconjunto arbitrario. Probar que existe un menor subgrupo de G que contiene a X. Describirlo en términos de los elementos de X.

El subgrupo cuya existencia se afirma en la segunda parte de este ejercicio se denomina el *subgrupo de G generado por X* y se denota $\langle X \rangle$. Si $X = \{x_1, \ldots, x_r\}$, escribimos $\langle x_1, \ldots, x_r \rangle$ en lugar de $\langle \{x_1, \ldots, x_r\} \rangle$.

13. Hallar todos los subgrupos de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{H}$, D_4 y $\mathbb{G}_n$.

14. Probar que $\mathbb{Z} = \langle m, n \rangle$ sii m y n son coprimos.

15. Probar que todo subgrupo finitamente generado de $\mathbb{Q}$ es cíclico.

16. Probar que un grupo no trivial sin subgrupos propios es cíclico de orden primo.

17. Sea $G \subseteq \mathbb{C}^\times$ un subgrupo finito del grupo multiplicativo $\mathbb{C}^\times$. Probar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $G = \mathbb{G}_n$ es el grupo de las raíces n-ésimas de la unidad.

†18. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\omega \in \mathbb{G}_{2^n}$ una raíz primitiva 2^n-ésima. Consideremos las matrices

$$R = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y sea $\mathbb{H}_n = \langle R, S \rangle$ el subgrupo generado por R y S en $\mathsf{GL}_2(\mathbb{C})$. Llamamos a $\mathbb{H}_n$ el *n-ésimo grupo de cuaterniones generalizados*. Determinar el orden de $\mathbb{H}_n$ y listar sus elementos.

19. Sea $G = \mathsf{GL}_2(\mathbb{R})$ y sean $\alpha, \beta \in G$ dados por

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mostrar que $\alpha^4 = \beta^3 = \mathsf{id}$, pero que $\alpha\beta$ tiene orden infinito. Así, $\langle \alpha, \beta \rangle$ es infinito.

Este ejemplo muestra que finitos elementos de orden finito pueden generar un subgrupo infinito.

20. Si G es un grupo y $A, B \subseteq G$ son subconjuntos, definimos

$$AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}.$$

Supongamos que A y B son subgrupos. Probar las siguientes afirmaciones.

(a) AB es un subgrupo de G sii $AB = BA$.

(b) $G = AB$ sii $G = \langle A, B \rangle$ y $AB = BA$.

(c) Si $AB = BA$ y $C \subseteq G$ es un subgrupo tal que $A \subseteq C$, entonces $AB \cap C = A(B \cap C)$.

(d) Si $G = AB$ y $C \subseteq G$ es un subgrupo tal que $A \subseteq C$, entonces $C = A(B \cap C)$.

El grupo simétrico $\mathbb{S}_n$

Fijamos $n \in \mathbb{N}$ y notamos $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. El *grupo simétrico* $\mathbb{S}_n$ es el grupo formado por todas las funciones $f : [n] \to [n]$ biyectivas, con la composición como operación.

21. *Ciclos.* Decimos que un elemento $\tau \in \mathbb{S}_n$ es un *ciclo* si existe un conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_r\} \subseteq [n]$ de forma que $\tau(a_i) = a_{i+1}$ para $1 \leq i < r$, $\tau(a_r) = a_1$, y $\tau(x) = x$ si $x \notin \{a_1, \dots, a_n\}$. En ese caso escribimos $\tau = (a_1\, a_2\, \dots\, a_r)$.

(a) Probar que $\rho \circ (a_1\, a_2\, \dots\, a_r) \circ \rho^{-1} = (\rho(a_1)\, \rho(a_2)\, \dots\, \rho(a_r))$ para todo $\rho \in S_n$.

(b) Dos ciclos $(a_1\, a_2 \dots a_r)$ y $(b_1\, \dots\, b_s)$ se dicen disjuntos si $\{a_1, \dots, a_n\} \cap \{b_1, \dots, b_m\} = \varnothing$. Probar que dos ciclos disjuntos conmutan entre sí. ¿Vale la recíproca?

(c) Probar que todo elemento de $\mathbb{S}_n$ se escribe como composición de ciclos disjuntos, y que los ciclos que aparecen en dicha composición están unívocamente determinados.

22. Probar que cada uno de los siguientes conjuntos genera $\mathbb{S}_n$.

(a) $\{(i\, j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$

(b) $\{(1\, i) \mid 1 \leq i \leq n\}$

(c) $\{(i \;\; i+1) \mid 1 \leq i < n\}$

(d) $\{(1\, 2),\ (1\, 2\, 3 \dots n)\}$

Subgrupos normales

23. Sea G un grupo.

(a) Sea $\mathcal{H}$ una familia de subgrupos normales de G. Probar que $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$ es un subgrupo normal de G.

(b) Sea $X \subseteq G$ un subconjunto arbitrario. Probar que existe un menor subgrupo normal de G que contiene a X. Describirlo en términos de los elementos de X.

El subgrupo cuya existencia se afirma en la segunda parte de este ejercicio se denomina el *subgrupo normal de G generado por X*. En general, este subgrupo no coincide con el subgrupo generado por X, construido en **12**.

(c) Supongamos que $X \subseteq G$ es un conjunto tal que $gXg^{-1} \subseteq X$ para todo $g \in G$. Probar que entonces el subgrupo normal generado por X coincide con el subgrupo generado por X.

24. (a) Sea G un grupo y sea $N \subseteq G$ un subgrupo tal que $gNg^{-1} \subseteq N$ para todo $g \in G$. Mostrar que N es normal.

(b) Sea $G = \mathsf{GL}_2(\mathbb{Q})$ y $H = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : n \in \mathbb{Z}\} \subset G$. Probar que H es un subgrupo de G. Por otro lado, si $g = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G$, mostrar que $gHg^{-1} \subsetneq H$.

25. Sea G un grupo. Si $a, b \in G$, escribimos $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$. El elemento $[a, b]$ se llama *conmutador de a y b*. Claramente $[a, b] = 1$ sii a y b conmutan, así que en cierta forma $[a, b]$ mide la no-conmutatividad de a y b.

(a) Sea $[G, G] = \langle \{[a, b] \mid a, b \in G\} \rangle$. Probar que $[G, G]$ es normal en G.

(b) Probar que G es abeliano sii $[G, G] = 1$.

(c) Hallar $[D_n, D_n]$ y $[\mathbb{H}, \mathbb{H}]$.

26. Sea G un grupo. Se define el *centro* de G como $\mathsf{Z}(G) = \{g \in G \mid gh = hg \text{ para todo } h \in G\}$. Decimos que los elementos de $\mathsf{Z}(G)$ son *centrales* en G.

(a) Probar que $\mathsf{Z}(G)$ es un subgrupo normal de G.

(b) Sea $X \subseteq G$ un subconjunto tal que $G = \langle X \rangle$. Probar que

$$\mathsf{Z}(G) = \{g \in G \mid gx = xg \text{ para todo } x \in X\}.$$

(c) Encontrar el centro de un grupo abeliano y el de $\mathbb{H}$.

(d) Para cada $n \geq 1$ encontrar el centro de D_n, de $\mathbb{S}_n$ y de $\mathsf{GL}_n(R)$ con $R \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p\}$.

(*e*) Sea X un conjunto cualquiera. Determinar el centro de G^X.

27. Sean G un grupo y H y K subgrupos de G.

(*a*) Probar que si alguno de H o K es normal en G entonces HK es un subgrupo.

(*b*) Probar que si los dos son normales, entonces HK es un subgrupo normal de G.

28. El objetivo de este ejercicio es dar un ejemplo de que la normalidad de subgrupos no es transitiva.

(*a*) Sea G el conjunto de isomorfismos afines; esto es, funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que pueden escribirse en la forma

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b$$

para ciertos $A \in \mathsf{GL}_2(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^{2\times 1}$. Probar que G es un grupo con la composición de funciones.

(*b*) Sea T el subconjunto de G formado por las traslaciones, es decir funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que pueden escribirse en la forma

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b$$

para cierto $b \in \mathbb{R}^{2\times 1}$. Probar que $T \trianglelefteq G$.

(*c*) Sea L el subconjunto de T formado por las funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que pueden escribirse en la forma

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b$$

con $b \in \mathbb{Z}^{2\times 1}$. Probar que L es un subgrupo de T. Notar que como T es abeliano, $L \trianglelefteq T$.

(*d*) Probar que L no es normal en G.

29. Probar que todo subgrupo de $\mathbb{H}$ es normal. Un grupo no abeliano con esta propiedad se dice *Hamiltoniano*. El siguente teorema de Reinhold Baer (1902–1979) describe completamente esta clase de grupos:

> **Teorema.** (R. Baer, Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe, S. B. Heidelberg. Akad. Wiss. 2 (1933), 12-17) *Un grupo finito es hamiltoniano sii es isomorfo a $\mathbb{H} \times A$ para algún grupo abeliano que no tiene elementos de orden* 4.

Morfismos y cocientes

30. Sean G un grupo y X un conjunto. Dado $x_0 \in X$ definimos $\mathsf{ev}_{x_0} : f \in G^X \mapsto f(x_0) \in G$. Mostrar que ev_{x_0} es un morfismo de grupos. Determinar su núcleo e imagen.

31. Mostrar que cualquiera sea el grupo G, existe un isomorfismo entre G y su grupo opuesto.

32. *Signo de una permutación.* Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\{e_i \mid 1 \le i \le n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Para cada $\sigma \in S_n$ definimos $p_\sigma \in M_n(\mathbb{R})$ como la matriz cuya i-ésima columna es el vector $e_{\sigma(i)}$. Probar las siguientes afirmaciones.

(*a*) $\det p_\sigma = \pm 1$.

(*b*) La función $\sigma \in S_n \mapsto p_\sigma \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ es un morfismo inyectivo de grupos.

(*c*) La función $\mathrm{sgn} : \sigma \in S_n \mapsto \det p_\sigma \in \{\pm 1\}$ es un morfismo de grupos. En particular $A_n = \ker(\mathrm{sgn})$ es un subgrupo propio normal de S_n, llamado el n-ésimo *grupo alternante*.

(*d*) Si $\tau = (i\,j)$ entonces $\mathrm{sgn}(\tau) = -1$. Deducir que $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ (resp. -1) sii σ se escribe como composición de un número par (resp. impar) de transposiciones.

33. Sea G un grupo. Mostrar que la función $\mathsf{ev}_1 : f \in \mathsf{Hom}_{\mathsf{Grp}}(\mathbb{Z}, G) \mapsto f(1) \in G$ es una biyección.

34. Determinar $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Grp}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ y $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Grp}}(\mathbb{Q}, G)$ para un grupo finito G.

35. Sea G un grupo. En cada caso, encontrar condiciones necesarias y suficientes para que la aplicación sea un morfismo de grupos.

(*a*) $(g, h) \in G \times G \mapsto gh \in G$
(*b*) $g \in G \mapsto g^{-1} \in G$
(*c*) $g \in G \mapsto g^2 \in G$

36. Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Probar que si $(m, n) = 1$ entonces $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Grp}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n)$ es trivial. ¿Qué sucede en general?

37. Sean G y H grupos, y sea $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Grp}}(G, H)$ el conjunto de todos los morfismos de grupos $f : G \to H$. ¿Se trata en general de un subgrupo de H^G? Encontrar condiciones sobre H que garanticen que lo sea.

38. Sea G un grupo.

(*a*) Dado $g \in G$, sea $\mathsf{inn}_g : h \in G \mapsto ghg^{-1} \in G$. Mostrar que $\mathsf{inn}_g \in \mathsf{Aut}(G)$.
(*b*) Mostrar que la aplicación $\mathsf{inn} : g \in G \mapsto \mathsf{inn}_g \in \mathsf{Aut}(G)$ es un morfismo de grupos.
(*c*) Describir el núcleo de inn. Los automorfismos que están en la imagen de G se llaman *automorfismos interiores* y la imagen misma se denota $\mathsf{Inn}(G)$.
(*d*) Mostrar que $\mathsf{Inn}(G)$ es un subgrupo normal de $\mathsf{Aut}(G)$.

39. Sea $f : G \to H$ un morfismo de grupos.

(*a*) Probar que $f([G, G]) \subseteq [H, H]$.
(*b*) ¿Es cierto en general que $f(\mathsf{Z}(G)) \subseteq \mathsf{Z}(H)$?

40. Sea G un grupo. Un subgrupo H de G se dice *característico* si $f(H) \subseteq H$ para todo $f \in \mathsf{Aut}(G)$. Probar las siguientes afirmaciones.

(*a*) Si $H \subseteq G$ es un subgrupo característico entonces $f(H) = H$ para todo $f \in \mathsf{Aut}(G)$.
(*b*) $\mathsf{Z}(G)$ y $[G, G]$ son subgrupos característicos de G.
(*c*) Si H es un subgrupo característico de G entonces H es normal en G.
(*d*) Si H es el único subgrupo de G de orden $|H|$ entonces es característico.
(*e*) Si H es un subgrupo característico de G y K es un subgrupo característico de H, entonces K es un subgrupo característico de G. Comparar con el ejercicio **28**.
(*f*) Si $H \trianglelefteq G$ y K es un subgrupo característico de H, entonces $K \trianglelefteq G$.

41. (*a*) Usando el hecho que $\mathsf{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$ permuta los elementos no nulos de $\mathbb{Z}_2^2$, encontrar un isomorfismo $\mathsf{GL}_2(\mathbb{Z}_2) \cong S_3$.
(*b*) Sea X el conjunto de los elementos de orden 2 de S_3. Mostrar que cada automorfismo de S_3 induce una permutación de X y deducir que $\mathsf{Aut}(S_3) \cong S_3$.

42. Mostrar que:

(*a*) $\mathbb{C}^\times / \mathbb{R}^+ \cong S^1$;
(*b*) $\mathsf{GL}_n(\Bbbk) / \mathsf{SL}_n(\Bbbk) \cong \Bbbk^\times$ si $\Bbbk$ es un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$;
(*c*) $S^1 / \mathbb{G}_n \cong S^1$ si $n \in \mathbb{N}$;
(*d*) si $m|n$, $\mathbb{G}_n / \mathbb{G}_m \cong \mathbb{G}_{n/m}$;
(*e*) $G/\mathsf{Z}(G) \cong \mathsf{Inn}(G)$ para cualquier grupo G.

43. Sean G un grupo y H y K subgrupos normales de G.

(*a*) Mostrar que hay un morfismo inyectivo $G/(H \cap K) \to G/H \times G/K$. ¿Cuándo es un isomorfismo?
(*b*) Deducir que si G/H y G/K son abelianos y $G \cap H = 1$ entonces G es abeliano.

44. Sean G un grupo y H un subgrupo. Probar que $[G, G] \subseteq H$ sii $H \trianglelefteq G$ y G/H es abeliano.