Clase del 26/04/16

1. Cocientes

Al final de la clase pasada vimos que como todo objeto cociente, M/S queda caracterizado por una propiedad universal:

1 Proposición. *Dados un A-módulo M y un submódulo S, el par $(M/S, \pi_S : M \to M/S)$ tiene las siguientes dos propiedades:*

(a) $S \subseteq \mathrm{Ker}(\pi_S)$.

(b) Si $f : M \to N$ es un morfismo de A-módulos tal que $S \subseteq \mathrm{Ker}(f)$, entonces el siguiente diagrama de flechas llenas se completa de manera única con la flecha punteada:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_S"'] & N \\ M/S \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"] & \end{tikzcd}$$

esto es, existe un único morfismo $\overline{f} : M/S \to N$ tal que $f = \overline{f} \circ \pi_S$.

2 Observación. Es claro que $Im(\overline{f}) = Im(f)$ y $\mathrm{Ker}(\overline{f}) = \pi_S(\mathrm{Ker}(f))$. Luego f es suryectiva si y sólo si $\overline{f}$ es suryectiva y $\overline{f}$ es inyectiva si y sólo si $\mathrm{Ker}(f) = S$.

De manera completamente análoga al caso de grupos vale el siguiente corolario.

3 Corolario. (Teoremas de isomorfismo) *Sea A un anillo.*

(a) Si M y N son A-módulos y $f : M \to N$ es un morfismo de A-módulos, hay un isomorfismo

$$\frac{M}{\mathrm{Ker}(f)} \cong Im(f).$$

(b) Si $T \subseteq S \subseteq M$ son submódulos de M, entonces

$$\frac{M/T}{S/T} \cong M/S.$$

(c) *Si S y T son dos submódulos de M, entonces*

$$\frac{S+T}{S} \cong \frac{T}{S \cap T}.$$

Demostración. Es idéntica al caso de grupos, sólo hay que verificar que todos los morfismos que aparecen son A-lineales. □

4 Ejemplos. (a) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo k, $t : V \to V$ un endomorfismo. Supongamos que existe en V un vector t-cíclico en V, es decir, un vector $v_0 \in V$ con

$$\langle v_0, t(v_0), t^2(v_0), \ldots \rangle = V.$$

Por ejemplo, podemos tomar $k = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $t(x, y, z) = (y, z, x)$ y $v_0 = (1, 0, 0)$.

Consideremos la aplicación

$$\phi : P \in k[X] \mapsto P(t)v_0 \in V.$$

Como v_0 es un vector cíclico, ϕ es sobreyectiva. Por otro lado, si $m_{v_0} \in k[X]$ es el polinomio mónico de grado mínimo tal que $m_{v_0}(t)(v_0) = 0$, entonces $\mathrm{Ker}(\phi) = \langle m_{v_0} \rangle$. Notemos que como v_0 es un vector t-cíclico, m_{v_0} coincide con el polinomio minimal y con el polinomio característico de t.

Ahora bien, (V, t) es un $k[X]$-módulo a través de t. Es fácil verificar que (V, t) y $k[X]/\langle m_{v_0} \rangle$ son isomorfos como $k[X]$-módulos.

(b) Sea $I \subset \mathbb{R}$ un subconjunto cerrado y $X \subset \mathbb{R}$ un abierto que contiene a I. Se sabe que toda función continua definida sobre I se puede extender a todo $\mathbb{R}$, luego, en particular, puede extenderse a X. Esto nos dice que el morfismo de restricción $C(X) \to C(I)$ es sobreyectivo. Sea

$$I^0 = \{f : X \to \mathcal{R} : f(y) = 0 \text{ para todo } y \in I\},$$

que es el núcleo de esta aplicación. Resulta entonces que $C(X)/I^0 \cong C(I)$ como $C(X)$-módulos.

5 Ejercicio. Caracterizar el cociente de $\mathbb{Z}^2$ por el $\mathbb{Z}$-submódulo generado por $(2, 4)$ y $(0, 3)$. Sugerencia: trate de encontrar un morfismo cuyo dominio sea $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ y que tenga por núcleo el submódulo generado por $(2, 4)$ y $(0, 3)$, y despuís considere la imagen.

6 Observación. (Submódulos del cociente) Sean M un A-módulo, S un A-submódulo de M y $\pi : M \to M/S$ la proyección, que es un morfismo de A-módulos. Si T es un submódulo de M, la imagen $\pi(T)$ es un submódulo de M/S. Esta correspondencia no es, en general, uno-a-uno: si $T \subseteq S$, claramente es $\pi(T) = \{0\}$. Recíprocamente, si T' es un submódulo de M/S, $\pi^{-1}(T')$ es un submódulo de M tal que $S \subseteq \pi^{-1}(T')$.

Dejamos como ejercicio verificar que si T es un submódulo de M, vale la igualdad:

$$\pi^{-1}(\pi(T)) = \langle T, S = T + S\rangle$$

Demostrar también que, vía π y π^{-1}, los submódulos de M/S están en correspondencia 1-1 con los submódulos de M que contienen a S.

Veremos ahora una caracterización de los epimorfismos.

7 Proposición. *Sean M y N A-módulos y $f : M \to N$ un morfismo de A-módulos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *f es suryectiva.*

(b) $\mathrm{Coker}(f) = N/Im(f) = \{0\}$.

(c) *Para todo A-módulo T y para todo par de morfismos g, $h : N \to T$, la igualdad $g \circ f = h \circ f$ implica que $g = h$.*

(d) *Para todo A-módulo T y para todo morfismo $g : N \to T$, la igualdad $g \circ f = 0$ implica que $g = 0$.*

Demostración. (a) $\Longleftrightarrow$ (b) Esto es claro, porque

$$N/Im(f) = \{0\} \iff N = Im(f).$$

(b)$\Rightarrow$(c) Sean $n \in N$ y g, h como en (c). Como $Im(f) = N$, existe $m \in M$ tal que $n = f(m)$. La hipótesis hecha sobre g y h dice que $g(f(m)) = h(f(m))$, luego $g(n) = h(n)$ para cualquier $n \in N$, esto es, $g = h$.

(c)$\Rightarrow$(d) Es claro tomando $h = 0$.

(d)$\Rightarrow$(b) Supongamos que vale (d) y tomemos $T = N/Im(f)$ y $g = \pi : N \to N/Im(f)$. Claramente $\pi \circ f = 0$, asíque $\pi = 0$, pero como π es suryectiva, resulta $N/Im(f) = \{0\}$. $\square$

8 Observación. La parte (c) de esta proposición demuestra que la noción de morfismo suryectivo coincide con la noción de epimorfismo categórico. Esto no sucede en otras categorías: por ejemplo, en la categoría de espacios métricos y funciones continuas como morfismos, una función con imagen densa es un epimorfismo categórico. Un ejemplo más algebraico es el de la categoría de anillos y morfismos de anillos. En esta categoría, dado un anillo B y un morfismo $\mathbb{Q} \to B$, la imagen del 1 tiene que ser necesariamente 1_B. Usando la linealidad, vemos inmediatamente que el morfismo queda unívocamente determinado en $\mathbb{Z}$, y la multiplicatividad implica que queda determinado sobre todo $\mathbb{Q}$. En particular todo morfismo de anillos con dominio $\mathbb{Q}$ queda determinado por su restricción a $\mathbb{Z}$, por lo tanto la inclusión $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ es un epimorfismo categórico.

9 Ejercicio. Si

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} T \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta, entonces $M \cong \mathrm{Ker}(g)$ y $T \cong \mathrm{Coker}(f)$. Además, si N es finitamente generado, T también lo es.

10 Definición. Si A un anillo conmutativo y M es un A-módulo, la **torsión** de M es el conjunto

$$t(M) = \{m \in M : \text{existe } a \in A,\ a \neq 0 \text{ tal que } am = 0\}.$$

11 Observación. Si A es dominio íntegro, entonces $t(M)$ es un A-submódulo de M.

12 Definición. Un A-módulo M se dice **de torsión** si $t(M) = M$ y **sin torsión** si $t(M) = 0$.

13 Ejemplos. (a) Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_n$ es de torsión como $\mathbb{Z}$-módulo pero sin torsión como $\mathbb{Z}_n$-módulo.

(b) Todo k-espacio vectorial es sin torsión sobre k.

(c) Si A es un dominio íntegro y M es un A-módulo, entonces $M/t(M)$ es un A-módulo sin torsión. Además, hay una sucesión exacta de A-módulos:

$$0 \longrightarrow t(M) \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/t(M) \longrightarrow 0.$$

Terminamos esta sección mencionando otra dirección en la que se pueden generalizar las nociones de monomorfismo y epimorfismo en el contexto de espacios vectoriales.

Si $f : V \to W$ es una transformación lineal entre dos espacios vectoriales que es un monomorfismo, entonces f induce un isomorfismo entre V e $Im(f)$, que es un subespacio de W. Como para cualquier subespacio de un espacio vectorial se puede encontrar un complemento, si escribimos $W = Im(f) \oplus T$ podemos definir una transformación lineal $r : W \to V$ como $r(w) = f^{-1}(w)$ si $w \in Im(f)$ y $r(w) = 0$ si $w \in T$. Para un w cualquiera escribimos de manera única $w = w_f + w_T$ con $w_f \in Im(f)$ y $w_T \in T$ y definimos $r(w) := r(w_f)$. Esta transformación lineal verifica $r \circ f = \mathrm{Id}_V$.

Dualmente, si $f : V \to W$ es un epimorfismo, $\mathrm{Ker}(f) \subseteq V$ es un subespacio y uno puede encontrar un complemento S y escribir $V = \mathrm{Ker}(f) \oplus S$. Es un ejercicio sencillo verificar que $f|_S$ es un monomorfismo y que $f(S) = f(V) = W$, de manera que $f|_S : S \to W$ es un isomorfismo. Podemos definir entonces una transformación lineal $s : W \to V$ como la composición

$$W \xrightarrow{(f|_S)^{-1}} S \hookrightarrow V$$

Se puede ver sin dificultad que $f \circ s = \mathrm{Id}_W$.

14 Definición. Sea $f : M \to N$ un morfismo de A-módulos.

- f es una **sección** si existe un morfismo $g : N \to M$ tal que $g \circ f = \mathrm{Id}_M$.
- f es una **retracción** si existe un morfismo $g : N \to M$ tal que $f \circ g = \mathrm{Id}_N$.

15 Observación. Si f es una sección entonces es inyectiva porque

$$f(m) = 0 \implies x = g(f(m)) = g(0) = 0 \implies \mathrm{Ker}(f) = 0.$$

Si f es una retracción entonces es sobreyectiva porque si $n \in N$, entonces $n = f(g(n))$, y por lo tanto $n \in Im(f)$.

Como corolario de los comentarios de los dos párrafos anteriores, vemos que las nociones de epimorfismo y de retracción, por un lado, y de monomorfismo y de sección, por otro, coinciden en la categoría de espacios vectoriales. En la categoría de A-módulos con A un anillo cualquiera no sucede lo mismo. Ya vimos la clase pasada que la proyección al cociente $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ es un epimorfismo que no es una retracción, y que la inclusión $2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es un monomorfismo que no es una sección. Otro ejemplo puede ser fabricado tomando los grupos abelianos $\mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{Z}_4$: el lector podrá encontrar morfismos entre estos grupos que sean monomorfismos o epimorfismos pero que no sean ni secciones ni retracciones.

2. Módulos cíclicos

En el caso de grupos se tiene a una descripción muy concisa de los grupos cíclicos: todos son cocientes de $\mathbb{Z}$. Como los subgrupos de $\mathbb{Z}$ son conocidos, entonces son conocidos todos los grupos cíclicos.

Si se tiene ahora un A-módulo cíclico M, es decir, un A-módulo en el que existe un elemento $x \in M$ con $Ax = \langle x \rangle = M$, podemos definir un morfismo sobreyectivo de A en M de manera que $a \mapsto ax$. El núcleo de esta aplicación es un submódulo a izquierda del A-módulo A, es decir, un ideal a izquierda de A. Si $I = \mathrm{Ker}(A \to M)$, entonces $M \cong A/I$ como A-módulo.

Recíprocamente, si I es un ideal a izquierda de A, entonces I es un A-submódulo de A y A/I es un A-módulo, que además es cíclico porque $A/I = \langle \bar{1} \rangle$. Luego todo módulo cíclico es isomorfo a un cociente de A por un ideal a izquierda.

Esto nos dice que describir los A-módulos cíclicos es equivalente a describir los ideales a izquierda de A.

3. Suma y producto

Sean I un conjunto de índices, A un anillo, y $(M_i)_{i\in I}$ una familia de A-módulos. Ya sabemos que el producto cartesiano

$$\prod_{i\in I} M_i = \{f : I \to \cup_{i\in I} M_i : f(i) \in M_i \text{ tal que } i \in I\}.$$

es un grupo abeliano con la suma coordenada a coordenada. Además es un A-módulo si definimos la acción de un elemento $a \in A$ como:

$$a(m_i)_{i\in I} = (am_i)_{i\in I}.$$

Este módulo producto viene provisto de proyecciones a cada factor, que son morfismos A-lineales, y tiene la propiedad de que para definir un morfismo $\phi : N \to \prod_{i\in I} M_i$ (donde N es un A-módulo cualquiera) basta definir "sus coordenadas", es decir basta dar para cada $i \in I$ un morfismo $\phi_i : N \to M_i$.

16 Observación. La estructura de A-módulo del producto cartesiano es la única estructura posible que hace de las proyecciones a las coordenadas morfismos de A-módulos. Además, la propiedad mencionada en el párrafo anterior es una propiedad universal que caracteriza completamente al producto.

Notemos ademas que si $i_0 \in I$, el subconjunto de $\prod_{i\in I} M_i$ de los elementos $(m_i)_{i\in I}$ con $m_i = 0$ si $i \neq i_0$ es un submódulo y puede identificarse con M_{i_0}.

De esta manera, tiene sentido considerar el A-submódulo de $\prod_{i\in I} M_i$ "generado por los M_i", que es, de alguna manera, el módulo más chico que contiene a los M_i sin relaciones extra. Más precisamente, definimos la **suma directa** de los M_i como:

$$\bigoplus_{i\in I} M_i = \{(m_i)_{i\in I} : m_i = 0 \text{ para casi todo } i \in I\}.$$

Se trata de un submódulo del producto y para cada $i_0 \in I$ se tienen inyecciones $j_{i_0} : M_{i_0} \to \bigoplus_{i\in I} M_i$. Si el conjunto de índices es finito, la suma directa coincide con el producto directo.

Si N es un A-módulo provisto de morfismos $\phi_i : M_i \to N$ para todo $i \in I$, usando el hecho de que $\oplus_{i\in I} M_i$ está generado por los M_i, se obtiene un único morfismo $\phi : \oplus_{i\in I} M_i \to N$ tal que restringido a cada M_{i_0} coincide con ϕ_{i_0}. Esta propiedad, de hecho, es una propiedad universal que caracteriza en términos categóricos a la suma directa.

La siguiente proposición da una idea de cómo la noción de sección y retracción se distingue de la de monomorfismo y epimorfismo.

17 Proposición. *Supongamos que*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} T \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de A-módulos. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) f *es una sección.*

(b) g *es una retracción.*

(c) La sucesión exacta es trivial. Es decir, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal, "\sim"] & T \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "j"] & M \oplus T \arrow[r, "\pi"] & T \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

En esa situación, diremos que la sucesión exacta es **escindida**, que la sucesión **se parte** o que es **“split”**.

Demostración. Si vale la condición (c), es claro que π es una retracción y que j es una sección. Usando el isomorfismo $N \cong M \oplus T$ del diagrama vemos inmediatamente que (c) implica (a) y (b). Veamos ahora que (a) implica (c), dejando como ejercicio ver que por ejemplo (b) implica (c).

Sea $h : N \to M$ una retracción de f, de manera que $h \circ f = \mathrm{Id}_M$. Definimos $\phi : N \to M \oplus T$ poniendo $\phi(n) = (h(n), g(n))$. Afirmamos que ϕ es un isomorfismo y que hace del diagrama en (c) un diagrama conmutativo.

Es claro que $\pi \circ \phi = g$. La propiedad de que h sea retracción de f es la conmutatividad del cuadrado de la izquierda.

Veamos que ϕ es un monomorfismo. Si $n \in \mathrm{Ker}(\phi)$, entonces, en particular, $n \in \mathrm{Ker}(g) = \Im(f)$. Si $m \in M$ es tal que $n = f(m)$, se tiene que $0 = h(n) = h(f(m)) = m$, por lo tanto $n = 0$.

Veamos que ϕ es un epimorfismos. Sea $m \in M$ y $t \in T$. Como g es un epimorfismo, existe $n \in N$ tal que $g(n) = t$. Pongamos $x = f(m) - f(h(n)) + n \in N$. Entonces

$$\phi(x) = \phi(f(m) - f(h(n)) + n) = (m, t).$$

Esto termina la prueba. $\square$