Clase del 24/05/16

1. Módulos inyectivos

As como la noción de módulo proyectivo P está relacionada con las propiedades del funtor $Hom_A(P,-)$, la de módulo inyectivo concierne al funtor contravariante $Hom_A(-,I)$.

Si M es un A-módulo, $Hom_A(-,M)$ es exacto a izquierda, es decir, para cualquier sucesión exacta

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

la sucesión

$$0 \longrightarrow Hom_A(Z,M) \xrightarrow{g^*} Hom_A(Y,M) \xrightarrow{f^*} Hom_A(X,M)$$

es exacta. Resulta natural preguntarse, en caso de que f sea un monomorfismo, si f^* es epimorfismo o no. La respuesta es que en general esto no es cierto, como se puede ver con el siguiente (contra)ejemplo:

1 Ejemplo. Tomemos $X = Y = \mathbb{Z}$ y sean $f : X \to Y$ el morfismo tal que $f(n) = 2n$ y $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ la proyección canónica a $Z = \mathbb{Z}_2$. Tenemos la siguiente suceción exacta:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

Aplicando el funtor $Hom_{\mathbb{Z}}(-,\mathbb{Z}_2)$, se obtiene la sucesión

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\pi^*} & Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{f^*} & Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2) \\ & \| & & \| & & \| \\ & \mathbb{Z}_2 & & \mathbb{Z}_2 & & \mathbb{Z}_2 \end{array}$$

Esta sucesión no puede ser extendida por cero a la derecha manteniendo la exactitud porque, en caso contrario, la dimensión como $\mathbb{Z}_2$-espacio vectorial del objeto del medio sera la suma de las dimensiones de los objetos de las puntas. En efecto, podemos explicitar f^*: si $\phi \in Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2)$,

$$f^*(\phi)(1) = \phi(f(1)) = \phi(2) = 2\phi(1) = 0,$$

asi que $f^* = 0$. Evidentemente, entonces, f^* no es epimorfismo.

Notemos que el problema se debe a la 2-torsión de $\mathbb{Z}_2$: si hubieramos puesto un $\mathbb{Z}$-módulo donde fuese posible dividir por 2, el razonamiento para ver que $f^* = 0$ no habría funcionado. Veremos luego que si M es un $\mathbb{Z}$-módulo divisible entonces $Hom_{\mathbb{Z}}(-, M)$ es exacto.

2 Definición. Un A-módulo M se llama A-inyectivo si el funtor $Hom_A(-, M) : {}_A\mathrm{Mod} \to Ab$ es exacto.

Asi, un A-módulo M es inyectivo si y sólo si $Hom_A(-, M)$ transforma monomorfismos en epimorfismos, si y sólo si dado el siguiente diagrama de flechas llenas de A-módulos se lo puede completar (de manera no necesariamente única) con la flecha punteada de manera tal que el diagrama completo sea conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h"] & Z \arrow[dl, dashed, "\hat{h}"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

3 Observación. Si M es un A-B-bimódulo, el funtor $Hom_A(-, M)$ toma valores en la categoría Mod_B. Como una sucesión de B-módulos es exacta si y sólo si es exacta vista como sucesión de grupos abelianos, un A-B-bimódulo ${}_AM_B$ es inyectivo como A-módulo si y sólo si el funtor $Hom_A(-, M) : {}_A\mathrm{Mod} \to \mathrm{Mod}_B$ es exacto.

4 Ejemplos.

$\mathbb{Z}$ *no* es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo. Consideramos, para ver ésto, el diagrama en el que las flechas son la inclusión $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ y la identidad de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "id"'] & \mathbb{Q} \arrow[dl, dashed, "\nexists"'] \\ & \mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

Es claro que no hay ningún morfismo $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ que restringido a $\mathbb{Z}$ sea la identidad, pues de hecho no hay ningún morfismo no nulo de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Z}$.

Si k es un cuerpo, todo k-espacio vectorial es k-inyectivo.

Si A es un dominio íntegro y K es su cuerpo de fracciones, entonces K es un A-módulo inyectivo. Sea $S = A - \{0\}$; recordemos que si $f : X \to Y$ es un monomorfismo, entonces $f_S : X_S \to Y_S$ también lo es.

Si ahora $g : X \to K$ es un morfismo cualquiera de A-módulos, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "i_S^X"] \arrow[dd, "g"'] & Y \arrow[dr, "i_S^Y"] & \\
& & X_S \arrow[r, "f_S"] \arrow[dl, dashed, "g_S"'] & Y_S \arrow[dll, dashed, "\hat{g}_S"] \\
& K & &
\end{tikzcd}$$

Las flechas llenas f y g son los datos originales y, por otro lado, $i_S^X : x \in X \mapsto \frac{x}{1} \in X_S$ e i_S^Y son las flechas canónicas de localización. Como los elementos de S son inversibles en K, el morfismo $g : X \to K$ se factoriza a través de X_S mediante g_S. Si ahora sólo consideramos X_S, Y_S y K, el diagrama está en la categoría de K-espacios vectoriales, en donde todos los objetos son inyectivos. Luego existe un morfismo $\hat{g}_S$ que preserva la conmutatividad.

Definimos entonces $\hat{g} : Y \to K$ poniendo $\hat{g} = \hat{g}_S \circ i_S^Y$. Como en el diagrama anterior todos los cuadrados y triángulos conmutan, se sigue que $g = \hat{g} \circ f$, es decir, que $\hat{g}$ extiende a g.

Como caso particular del ejemplo anterior, $\mathbb{Q}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo.

5 Observación. Si M es un submódulo de un módulo inyectivo, entonces M no tiene por qué ser inyectivo (considerar $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$), sin embargo veremos ahora que un sumando directo de un inyectivo es inyectivo.

Dado que la definición de inyectivo es dual a la definición de proyectivo, muchos de los resultados para proyectivos se dualizan y se obtienen enunciados sobre módulos inyectivos, que se demuestran muchas veces dualizando las demostraciones anteriores:

6 Proposición. *Sea A un anillo y $(M_i)_{i \in I}$ una familia de A-módulos. Entonces:*

(a) $\prod_{i \in I} M_i$ *es inyectivo si y sólo si cada* M_i *es inyectivo.*

(b) Si $\bigoplus_{i \in I} M_i$ *es inyectivo entonces cada* M_i *es inyectivo. La recíproca no es necesariamente cierta.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ un monomorfismo y consideremos el cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Hom_A(Y, \prod_{i \in I} M_i) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, equal] & Hom_A(X, \prod_{i \in I} M_i) \arrow[d, equal] \\
\prod_{i \in I} Hom_A(Y, M_i) \arrow[r, "\prod f_i^*"] & \prod_{i \in I} Hom_A(X, M_i)
\end{tikzcd}$$

La flecha f^* es un epimorfismo si y sólo si la flecha $\prod f_i^*$ lo es. Y $\prod f_i^*$ es un epimorfismo si y sólo si todas las f_i^* lo son. Esto demuestra la primera afirmación.

Supongamos, por otro lado, que $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ es inyectivo y sea $i_0 \in I$. Entonces $M = \left(\bigoplus_{i\in I-\{i_0\}} M_i\right) \times M_{i_0}$. La primera parte implica entonces que también M_{i_0} inyectivo. $\square$

El siguiente resultado dice que para verificar la exactitud a derecha de $Hom_A(-, M)$, basta aplicar el funtor a las inclusiones $J \hookrightarrow A$, donde J recorre el conjunto de ideales de A.

7 Teorema. *(Baer) Un A-módulo M es inyectivo si y sólo si tiene la siguiente propiedad: para todo J ideal de A y para todo $f : J \to M$ morfismo de A-módulos, existe $\overline{f} : A \to M$ tal que $\overline{f}|_J = f$.*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & J \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[dl, dashed, "\overline{f}"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Demostración. Es claro que si M es inyectivo, entonces tiene la propiedad del enunciado. Veamos ahora que un módulo M con esa propiedad de extensión con respecto a ideales de A es en efecto un A-módulo inyectivo.

Dado un diagrama de líneas llenas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[dl, dashed, "\hat{f}"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

queremos ver que existe $\overline{f}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que X es un submódulo de Y y que g es la inclusión –si no, reemplazamos X por $g(X)$ y f por $f \circ g^{-1}$.

Sea $\mathfrak{Y}$ el conjunto de pares (Y', f') con $Y \subset Y$ un submódulo de Y tal que $Y' \supset X$ y $f' \in \hom_A(Y', M)$ tal que $f'|_X = f$. Ordenamos a $\mathfrak{Y}$ poniendo

$$(Y', f') \leq (Y'', f'') \iff Y' \subseteq Y'' \text{ y } f''|_{Y'} = f'.$$

Es fácil ver que $(\mathfrak{Y}, \leq)$ es un conjunto inductivo superiormente, asíque tiene algún elemento maximal (Y_0, f_0).

Supongamos que $Y_0 \subseteq Y$, y que la inclusión es estricta, y sea $y \in Y - Y_0$. Entonces $\langle y, Y_0\rangle$ contiene estrictamente a Y_0. Sea $J = \{a \in A : ay \in Y_0\}$; como Y_0 es un submódulo de Y, J es un ideal de A (verificarlo!). Sea $\phi : J \to M$ tal que $\phi(a) = f_0(ay)$ para cada $a \in J$. Por hipótesis, ϕ se puede extender a $\overline{\phi} : A \to M$. Veamos que f_0 se puede extender a un morfismo $f_1 : \langle y, Y_0\rangle \to M$.

Sea $x = ay + y_0$ donde $a \in A$ e $y_0 \in Y_0$. Ponemos

$$f_1(x) = \overline{\phi}(a) + f_0(y_0)$$

Esto está bien definido: si $ay + y_0 = a'y + y_0'$, entonces

$$(a - a')y = y_0' - y_0 \in Y_0,$$

es decir, $(a - a') \in J$, asíque

$$\begin{aligned} \overline{\phi}(a) - \overline{\phi}(a') &= \overline{\phi}(a - a') = \phi(a - a') \\ &= f_0((a - a')y) = f_0(y_0' - y_0) \\ &= f_0(y_0') - f_0(y_0) \end{aligned}$$

Reordenando los términos de estas igualdades, vemos que

$$\overline{\phi(a)} + f_0(y_0) = \overline{\phi(a')} + f_0(y_0').$$

Esto nos dice que la función está bien definida. Es claro, además, que $(Y_0, f_0) < (\langle y, Y_0, f_1 \rangle)$ en $\mathfrak{Y}$. Esto contradice la maximalidad de (Y_0, f_0), síque debe ser $Y_0 = Y$. $\square$

8 Ejercicio. Utilizando el teorema anterior, dar una nueva demostración de que $\mathbb{Q}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo.

9 Ejemplo. $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo, asícomo también $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ para cualquier primo p.

10 Definición. Un A-módulo M se dice divisible si para cualquier $a \in A$ no nulo y cada $m \in M$, existe $m' \in M$ tal que $am' = m$.

11 Ejemplo. $\mathbb{Q}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo divisible.

Para obtener más ejemplos de módulos inyectivos, probaremos los siguientes dos lemas:

12 Lema. *Un grupo abeliano G es divisible si y sólo si es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo.*

Demostración. Para ver la suficiencia de la condición, utilizaremos el Teorema de Baer, es decir, probaremos que todo diagrama de grupos abelianos

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle h} & & \\ & & G & & \end{array}$$

en el que donde I es un ideal de $\mathbb{Z}$, se completa con un morfismo $\mathbb{Z} \to G$.

Como $\mathbb{Z}$ es un dominio de ideales principales, si $I \subseteq \mathbb{Z}$, existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $I = n\mathbb{Z}$. Si $n = 0$ se puede extender el morfismo 0 por 0. Si $n \neq 0$, como G es un grupo abeliano divisible existe $v \in G$ tal que $h(n) = nv$. Por linealidad, esto implica que $h(jn) = jnv$ para todo $jn \in n\mathbb{Z}$, asíque podemos definir $\overline{h} : \mathbb{Z} \to G$ de forma que $\overline{h}(m) := mv$.

Veamos ahora la necesidad. Supongamos que G es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo. Si $g \in G$ y $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, queremos ver que existe $g' \in G$ tal que $g = ng'$.

Definamos para eso un morfismo $h_g : \mathbb{Z} \to G$ poniendo, para cada $m \in \mathbb{Z}$, $h_g(m) = mg$ y consideremos el monomorfismo dado por la multiplicación por n, $\lambda_n : x \in \mathbb{Z} \to nx \in \mathbb{Z}$ y el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\lambda_n"] \arrow[d, "h_g"] & \mathbb{Z} \arrow[dl, dashed, "\hat{h_g}"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

Como G es inyectivo, existe $\hat{h_g} : \mathbb{Z} \to G$ que hace del diagrama anterior un diagrama conmutativo, esto es, tal que

$$\hat{h_g}(nm) = h_g(m) = mg$$

para todo $m \in \mathbb{Z}$. Si tomamos $g' := \hat{h_g}(1)$, es

$$ng' = n\hat{h_g}(1) = \hat{h_g}(n) = h_g(1) = g.$$

Esto muestra que G es divisible. $\square$

13 Proposición. *Si G es un grupo abeliano divisible, el A-módulo $Hom_{\mathbb{Z}}(A, G)$ es inyectivo.*

Demostración. Sea N un submódulo de M y $h : N \to Hom_{\mathbb{Z}}(A, G)$ un morfismo de A-módulos a izquierda. Recordemos que la estructura de A-módulo a izquierda en $Hom_{\mathbb{Z}}(A, G)$ está dada por la estructura a derecha de A, es decir, si $\phi \in Hom_{\mathbb{Z}}(A, G)$ y a, $a' \in A$, entonces $(a\phi)(a') = \phi(a'a)$.

Definamos $f : N \to G$ de manera que $f(n) = h(n)(1)$ para todo $n \in N$. Como G es $\mathbb{Z}$-inyectivo, existe un morfismo de grupos abelianos $\overline{f} : M \to G$ que extiende a f. Obtenemos una extensión $\hat{h} : M \to Hom_{\mathbb{Z}}(A, G)$ de h poniendo

$$\overline{h}(m)(a) = \overline{f}(am)$$

si $a \in A$ y $m \in M$. El morfismo $\overline{h}$ es A-lineal a izquierda (verificarlo!) y el diagrama conmuta porque, si $n \in N$, es

$$\overline{h}(n)(a) = \overline{f}(an) = f(an) = h(an)(1)$$

y, como h es A-lineal,

$$h(an)(1) = (ah(n))(1) = h(n)(a).$$

Esto termina la prueba. $\square$

14 Ejercicio. Adaptar los resultados anteriores para demostrar que si A es un dominio de ideales principales y M es un A-módulo, entonces M es A-inyectivo si y sólo si es A-divisible.

Dado un A-módulo cualquiera M, siempre se puede encontrar un A-módulo proyectivo P y un epimorfismo $P \to M$. Podemos preguntarnos si el enunciado dual es cierto: dado un A-módulo cualquiera M, existe siempre un A-módulo inyectivo I y un monomorfismo $M \to I$? La respuesta es síy se da en dos etapas. Primero resolvamos el problema en la categoría de grupos abelianos:

15 Lema. *Sea M un grupo abeliano cualquiera. Entonces existe un grupo abeliano divisible D y un monomorfismo $M \to D$.*

Demostración. Supongamos primero que M es cíclico y no nulo. Entonces hay dos posibilidades: o bien $M \cong \mathbb{Z}$ o bien $M \cong \mathbb{Z}_n$ con $n \in \mathbb{N}$. En el primer caso, $M \cong \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$. En el segundo, se tiene que $M \cong \mathbb{Z}_n \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, con el monomorfismo de $\mathbb{Z}_n$ en $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ definido por $\hat{1} \mapsto \frac{\hat{1}}{n}$.

Si ahora M es arbitrario y $m \in M$, $\langle m \rangle$ es cíclico y existe un monomorfismo $\langle m \rangle \hookrightarrow D_m$ con D_m un grupo abeliano divisible. Como los $\mathbb{Z}$-módulos divisibles son inyectivos, para cada $m \in M$, existe un morfismo $M \to D_m$ que extiende al monomorfismo anterior, de manera que conmuta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \langle m \rangle \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[dl, dashed, "f_m"] \\
& D_m &
\end{tikzcd}$$

El morfismo f_m no tiene por qué ser inyectivo, sin embargo es claro que $m \notin \operatorname{Ker}(f_m)$.

Consideremos ahora $D = \prod_{m \in M - \{0\}} D_m$ y el morfismo

$$f : x \in M \mapsto (f_m(x))_{m \in M - \{0\}} \in \prod_{m \in M - \{0\}} D_m$$

Como todos los D_m son $\mathbb{Z}$-módulos inyectivos, D es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo. Además $\operatorname{Ker}(f) = \bigcap_{m \in M - \{0\}} \operatorname{Ker}(f_m)$. Pero si $m \in M$, $m \notin \operatorname{Ker}(f_m) \supseteq \ker(f)$. Esto nos dice que f es un monomorfismo. $\square$

16 Proposición. *Sea M un A-módulo cualquiera. Existe un A-módulo inyectivo I y un monomorfismo $M \to I$.*

Demostración. Si consideramos a M como grupo abeliano, sabemos que existe un monomorfismo $M \to D$, con D un grupo abeliano divisible. Tenemos entonces una cadena de isomorfismos y monomorfismos:

$$M \cong Hom_A(A, M) \hookrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(A, M) \hookrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(A, D).$$

Si llamamos $I = Hom_{\mathbb{Z}}(A, D)$, resulta de la proposición 13 que I es A-inyectivo. □

17 Proposición. *Sea M un A-módulo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) M es inyectivo.

(b) Toda sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

se parte.

Demostración. Veamos que (1) implica (2) Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}_M"'] & X \arrow[dl, dashed] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Sabemos que existe una flecha punteada que hace conmutar el diagrama, porque M es inyectivo. Esto nos dice que la sucesión

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

se parte.

(2) implica (1) Supongamos que M es un A-módulo que satisface la condición 2(). Existe un monomorfismo $f : M \to I$ con I inyectivo. Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I \longrightarrow \mathrm{Coker}(f) \longrightarrow 0$$

Sabemos que esta sucesión se parte, luego M es un sumando directo de un inyectivo. En particular, es un factor directo y vemos que M es inyectivo.

□