IV COMPETENCIA MATEMATICA ERNESTO PAENZA

28 de agosto de 1989

SOLUCIONES

Las soluciones que se encuentran a continuación fueron elegidas por el Comité Organizador entre las respuestas de los participantes. *Son aquellas que más nos gustaron*, además de ser correctas.

Los vectores luego del número del problema indican:

⋆ *la primera coordenada*: el número de participantes que obtuvieron 8, 9 ó 10 puntos en el problema (problema esencialmente resuelto).

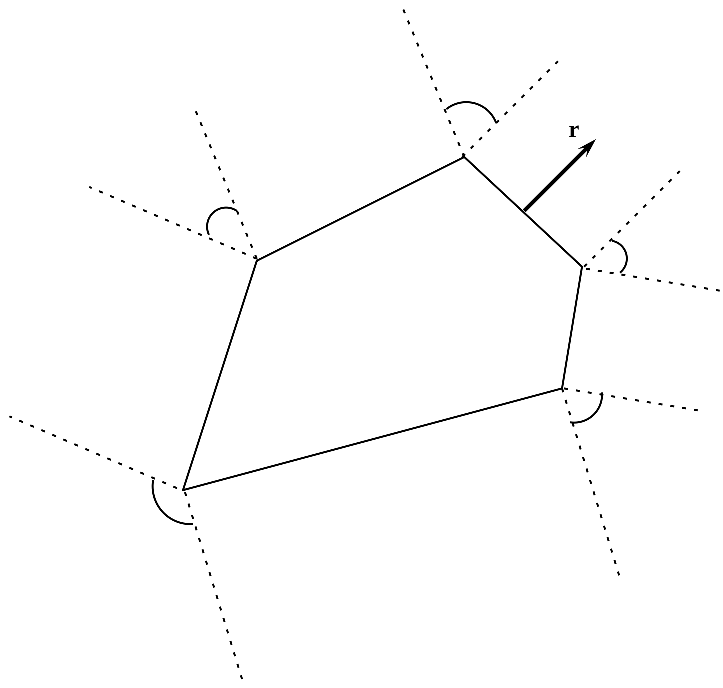
⋆ *la segunda coordenada*: el número de participantes que obtuvieron 5, 6 ó 7 puntos (esencialmente "la mitad o un poco más" del problema).

⋆ *la tercera coordenada*: el número de participantes que obtuvieron 1, 2, 3 ó 4 puntos (casos particulares, o algo conducente a una posible solución).

Problema 1. (12,4,6,78)

Solución de Eduardo C. Andrés, Instituto Balseiro - Universidad Nacional de Cuyo

Dentro del polígono el integrando vale 1. Desde cada vértice trazo perpendiculares a las dos aristas que lo forman. Me quedan franjas que son como desplazar cada arista hacia afuera hasta el infinito de manera que toque siempre las perpendiculares trazadas antes.



En las franjas, $d(x,y)$ es la distancia del punto (x,y) a la arista. En los ángulos que quedan es $d(x,y)$ = distancia al vértice. La suma de los ángulos es 2π como se ve ya que en los bordes de cada franja son paralelos. La integral en cada franja la pongo como $\ell_i \int_0^\infty e^{-r}\, dr = \ell_i$ (ℓ_i = largo de la i-ésima arista, $P = \sum_i \ell_i$). La integral en cada sector angular es $\alpha_i \int_0^\infty re^{-r}\, dr = \alpha_i$ (α_i = i-ésimo ángulo, $2\pi = \sum_i \alpha_i$).

La integral en el interior es A. Por lo tanto, $a = 2\pi$, $b = 1$, y $c = 1$.

Problema 2. (2,29,5,64)

Solución de Martín Sombra, Facultad de Ciencias Exactas - Universidad Nacional de La Plata

Dado m, tenemos que $k \geqslant m$ porque $c > 2^{m-1}$ y $d > c$. Por otro lado,

$$a(2^k - a) = b(2^m - b) \qquad \text{y} \qquad 2^m(a2^{k-m} - b) = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Luego, $2^{m-1}|(a-b)$ ó $2^{m-1}|(a+b)$. Pero que $2^{m-1}|(b-a)$ es imposible pues $b < 2^{m-1}$ y $b - a > 0$. Luego, $2^{m-1}|(a+b)$.
Como $a < b < 2^{m-1}$ implica $b + a = 2^{m-1}$, se tiene:

$$\begin{aligned} 2^m((2^{m-1} - b)2^{k-m} - b) &= 2^{m-1}(2^{m-1} - 2b) \\ (2^{m-1} - b)2^{k-m} &= 2^{m-2} - b \\ 2^{m-1} - b &= 2^{2m-2-k} \\ b &= 2^{m-1} - 2^{2m-2-k} > 0 \end{aligned}$$

De aquí, como b es impar, se deduce que $k = 2m - 2$, $m \geqslant 3$.

Luego, $a = 1$, $b = 2^{m-1} - 1$, $c = 2^{m-1} + 1$, $d = 2^{2m-2} - 1$, $k = 2m - 2$, $m \geqslant 3$.

Problema 3. (5,1,16,78)

Solución de Pablo E. Giambiagi, F.C.E. y N. - Universidad de Buenos Aires

Sean $A = \sum_\pi \pi(A)$ y $B = \sum_\pi \pi(B)$. Por inducción en n. Si $n = 1$, $A = B = 1$. Supongo válida la igualdad para n. Voy a construir las particiones de $n+1$ a partir de las de n y ver que la cantidad de “1” que se agregan queda equilibrada con las modificaciones en la cantidad de números distintos. Hay dos casos:

(a) La partición no tiene “1”. Construyo una partición de $n+1$ agregando un “1”. *Así se obtienen todas las particiones con un sólo “1”.* La nueva partición agrega un “1” pero aparece un número distinto. Esto implica que se mantenga la igualdad al incrementarse simultáneamente en uno los valores de A y de B.

(b) La partición tiene un “1”. Construyo una partición π_1 de $n+1$ agregando un “1”, y otra partición π_2 que resulta de sumar todos los “1”. Por ejemplo, si $n = 5$ y $\pi = 1 + 4$, las dos particiones de $n + 1 = 6$ son $\pi_1 = 1 + 1 + 4$ y $\pi_2 = 2 + 4$. *Así se obtienen todas las particiones con más de un “1” o con ningún “1”.* Veamos que se sigue manteniendo la igualdad. Supongamos que la partición π_2 tiene k números distintos. *Hay exactamente k particiones de n tales que al agregar un “1” y sumar luego los “1” se obtiene la misma partición de $n+1$.* Es decir, la nueva partición π_2 que aumenta en k el valor de B, queda compensada con la cantidad justa de nuevas particiones π_1 que aumentan en uno (cada una de ellas) el valor de A.

Ejemplo ilustrativo. Sea $n = 5$,

Particiones de n	Particiones de $n+1$	
	Agrego un “1”	Sumo los “1”
1+1+1+1+1	1+1+1+1+1+1	6
1+1+1+2	1+1+1+1+2	4+2
1+1+3	1+1+1+3	3+3
1+2+2	1+1+2+2	2+2+2
1+4	1+1+4	2+4
2+3	1+2+3	
5	1+5	

Se nota que $4+2=2+4$ es la única nueva partición π_2 sin “1” que tiene más de un número distinto, en este caso dos, y aparece por lo tanto dos veces en la tabla.

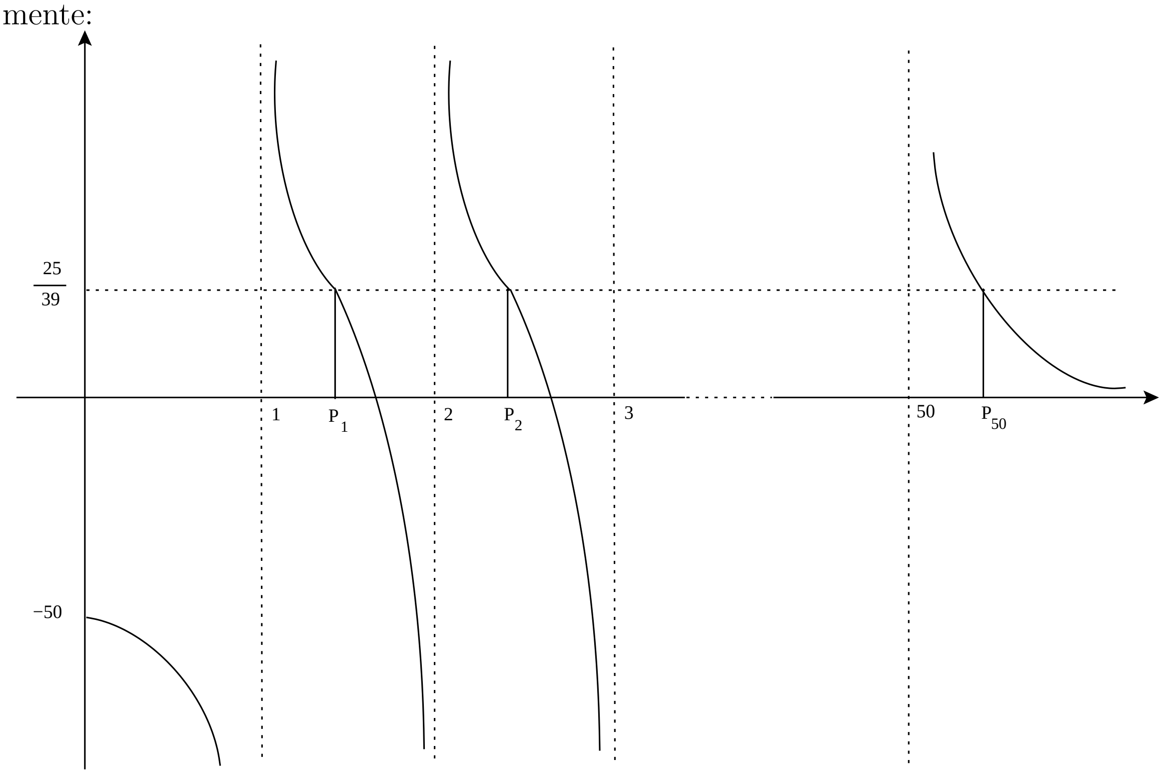
Problema 4. (7,1,4,88)

Solución de Pablo Lopito, Facultad de Ingeniería, Ciencias Exactas y Agrimensura - Universidad Nacional de Rosario

Sea $f(x) = \sum_{k=1}^{50} \frac{k}{x-k}$. Como “$x < 0 \Rightarrow f(x) < 0$”, basta considerar los x positivos. Para $1 \leqslant n \leqslant 50$ se tiene que

$$\lim_{x\to n^-} f(x) = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to n^+} f(x) = -\infty$$

Como la derivada $f'(x) = -\sum_{k=1}^{50} \frac{k}{(x-k)^2}$ es siempre negativa, se tiene aproximadamente:



donde $f(p_n) = \dfrac{25}{39}$. El conjunto es la unión de los intervalos $[n, p_n]$, $1 \leqslant n \leqslant 50$ y su longitud será

$$\ell = \sum_{n=1}^{50} p_n - \sum_{n=1}^{50} n$$

Sea $\pi(x)$ el polinomio $\pi(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-50)$. Se tiene $f(x)\pi(x) = 1(x-2)(x-3)\dots(x-50) + 2(x-1)(x-3)\dots(x-50) + \dots + 50(x-1)\dots(x-49)$. Luego, $R(x) = -\dfrac{25}{39}\pi(x) + f(x)\pi(x)$ es un polinomio de grado 50. Como $R(x) = \left(f(x) - \dfrac{25}{39}\right)\pi(x)$, sus raíces son $p_1 p_2 \dots p_{50}$. La suma de éstas será el coeficiente de x^{49} (con signo cambiado) dividido el coeficiente de x^{50}. Luego,

$$\sum_{n=1}^{50} p_n = \frac{39}{25}\left(\sum_{n=1}^{50} n - \frac{25}{39}\sum_{n=1}^{50}(-n)\right) = \frac{39}{25}\left(51.25 + \frac{25}{39}51.25\right) = 39.51 + 51.25 = 51.64$$

Luego, se tiene

$$\ell = 51.64 - 51.25 = 51.39 = 1989$$

Problema 5. (14,3,1,82)

Si bien hay varias soluciones correctas, ninguna es completamente satisfactoria.
Solución del Comité Organizador

Se puede considerar que el punto, al encontrar una arista sigue en línea recta en el cuadrado adyacente. De esa manera encontrará un vértice si y sólo si lo hubiese hecho en el cuadrado original luego de recorrer la misma distancia. Se tiene entonces:

$$n_{P_0}(t) \leqslant \text{Número de puntos } p \text{ de coordenadas enteras dentro del círculo con centro en } p_0 \text{ y radio } t \tag{1}$$

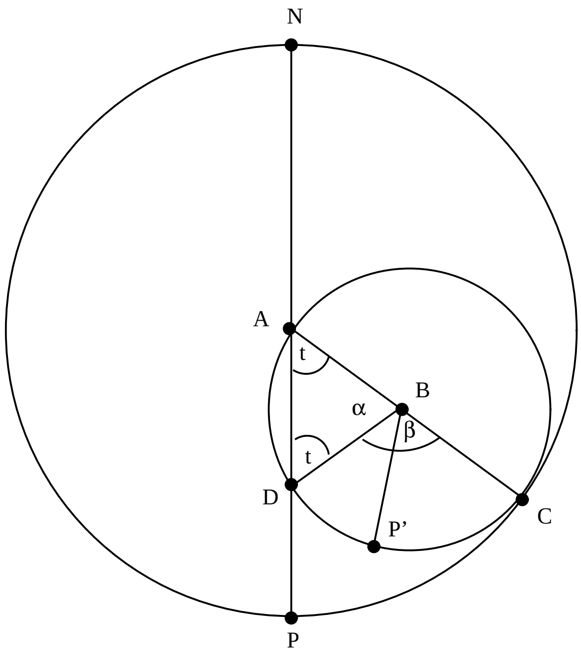
Si una de las coordenadas de p_0 es racional y la otra es irracional, toda semirrecta con origen en p_0 encuentra a lo sumo un punto con coordenadas enteras. Se sigue que para un tal p_0 en (1) vale la igualdad. Luego, el área cubierta por los cuadrados unitarios con centro en los puntos p de (1) es igual a $n_{P_0}(t)$. Se sigue que valen las desigualdades:

$$\pi\left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \leqslant n_{P_0}(t) \leqslant \pi\left(t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

De la segunda tenemos que para $a = \pi$ existen constantes $b = \pi\sqrt{2}$ y $c = \dfrac{\pi}{2}$ que verifican la cota pedida. De la primera se sigue que $\pi \leqslant \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{n_{P_0}(t)}{t^2}$. Luego, ningún $a < \pi$ sirve.

Problema 6. (37,11,16,36)

Solución de Leandro L. Blas, Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional de San Juan



Supongamos que C_2 ha cambiado de posición (medido con el ángulo t). Sea D el punto de intersección con el eje vertical.

ABD isósceles $\Longrightarrow$ $\alpha = \pi - 2t$ y también $\beta = \pi - \alpha$. Por lo tanto, $\beta = 2t$.
Si PC es el arco entre P y C tendremos $PC = R.t$ ($R =$ radio de C_1). Si P se trasladó a P', será $P'C = PC$. Por otro lado,
$P'C = \text{Ang}(P'BC).\dfrac{R}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{Ang}(P'BC) = 2t \quad \Rightarrow \quad \beta = \text{Ang}(P'BC) \quad \Rightarrow \quad P' \equiv D.$

O sea que el punto P se nueve sobre el eje vertical. Si C describe un círculo P subirá, pasando por A hasta N y luego volverá a bajar verticalmente hasta la posición inicial.

Composición tipográfica: LaTeX 2_ε (http://www.miktex.org)
Gráficos: Tkpaint (http://www.netanya.ac.il/~samy/tkpaint.html)