II COMPETENCIA MATEMATICA ERNESTO PAENZA

28 DE AGOSTO DE 1987

SOLUCIONES

Las soluciones que se encuentran a continuación fueron elegidas por el Comité Organizador entre las respuestas de los participantes. *Son aquellas que más nos gustaron*, además de ser correctas.

Los vectores luego del número del problema indican:

⋆ *la primera coordenada*: el número de participantes que obtuvieron 8, 9 ó 10 puntos en el problema (problema esencialmente resuelto).

⋆ *la segunda coordenada*: el número de participantes que obtuvieron 5, 6 ó 7 puntos (esencialmente “la mitad o un poco más” del problema).

⋆ *la tercera coordenada*: el número de participantes que obtuvieron 1, 2, 3 ó 4 puntos (casos particulares, o algo conducente a una posible solución).

Problema 1. (6,0,6)

Solución de Eduardo Murmis, Facultad de Ingeniería - Universidad de Buenos Aires

Puede verificarse que:

$$r_j(n-1) = \begin{cases} r_j(n) - 1 & \text{para todo } j \text{ tal que } r_j(n) \neq 0 \\ j - 1 = j + r_j(n) - 1 & \text{para todo } j \text{ tal que } r_j(n) = 0 \end{cases}$$

Entonces:

$$r(n-1) = \sum_{j=1}^{n-1} r_j(n-1) + \sum_{k|n} k = \sum_{j=1}^{n-1} r_j(n) \ - \ (n-1) + \sum_{k|n} k$$

Pero como $r_n(n) = 0$,

$$\sum_{j=1}^{n-1} r_j(n) = \sum_{j=1}^{n} r_j(n) = r(n)$$

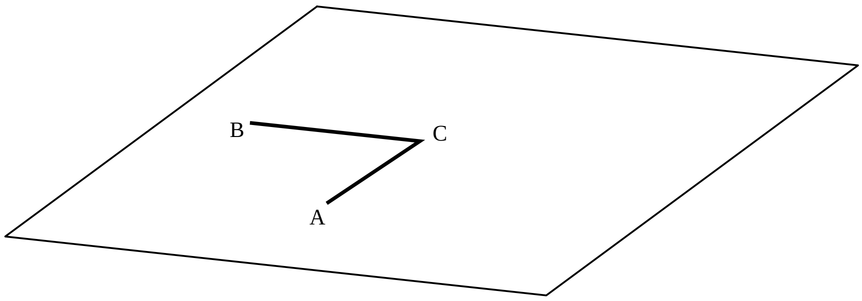
Luego, $r(n) = r(n-1)$ si y sólo si $n - 1 = \sum_{k|n} k$.

Lo que se verifica para todas las potencias de 2, pues $2^j - 1 = \sum_{i=1}^{j-1} 2^i$.

Problema 2. (3,1,5)

Solución de Eduardo Murmis, Facultad de Ingeniería - Universidad de Buenos Aires

Sean ABC los tres puntos extremos de la “V”. Consideremos el paralelogramo determinado por los pares de rectas que están a distancia $\dfrac{2\alpha}{d(A,C)}$ y $\dfrac{2\alpha}{d(B,C)}$ de los segmentos AC y BC respectivamente.

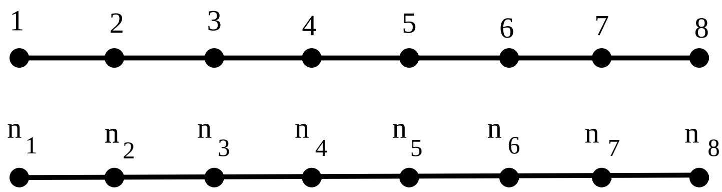


Sea D un punto de E situado fuera del paralelogramo. D forma con AC o con BC un triángulo propio de área mayor que α. Acercando el vértice C a A o a B, según corresponda, se obtiene (teorema del valor medio) un triángulo de área α.

Problema 3. (1,0,6)

Solución de José Lorenzano, Instituto Balseiro, Bariloche

Supongamos que existe una tal numeración. Podemos suponer que la numeración de un octógono es $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ y sea $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8$ la numeración del otro. Desarrollando los octógonos, tenemos:



Hay ocho posiciones posibles de colocar los polígonos, que corresponden a mover la tira $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8$. Por ejemplo, moviéndose a la derecha un sitio, el n_1 queda debajo de 2, el n_2 del 3, etc., y el n_8 debajo del 1.

Diremos que n_k realiza la coincidencia si $k = n_k$.

Un mismo n_k no puede realizar la coincidencia en dos (o varias) posiciones distintas, lo que implica que en cada posición hay a lo sumo una coincidencia. De esto se sigue que los números $(n_k - k)$ son todos distintos. Además se tiene $-7 \leqslant n_k - k \leqslant 7$.

Veamos ahora que los números $(n_k - k)$ son también todos distintos módulo 8. Tomemos dos, $(n_k - k)$ y $(n_i - i)$. Si ambos son del mismo signo está claro que son distintos. Si son de signo contrario e iguales módulo 8, se tendría que $n_k - k = 8 - (n_i - i)$, lo que significa que n_k y n_i realizan lo coincidencia en la misma posición. Absurdo.

Los ocho números $(n_k - k)$ son entonces todos distintos módulo 8, lo que muestra que $\sum_k (n_k - k) = 4$ módulo 8. Por otro lado, está claro que $\sum_k (n_k - k) = 0$. Absurdo.

Luego, no existe una tal numeración.

Problema 4. (0,2,5)

Solución del Comité Organizador

Como $\dfrac{x_i}{x_{i+1}} \geqslant 1$, se tiene que:

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_k^2}{x_{k+1}} \;=\; x_0\frac{x_0}{x_1} + x_1\frac{x_1}{x_2} + \cdots + x_k\frac{x_k}{x_{k+1}} \;\geqslant\; x_0 + x_1 + \cdots + x_k$$

Luego, puede suponerse que $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ converge (en caso contrario el resultado es cierto), en particular, que $x_i \longrightarrow 0$. Además, está claro que puede suponerse que la sucesión es estrictamente decreciente. Pongamos entonces: $\alpha_i = x_i - x_{i+1}$. Se tiene $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = 1$ y $\dfrac{x_i}{\alpha_i} > 1$. Luego,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i^2}{x_{i+1}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i^2}{x_i - \alpha_i} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \cdot \frac{(x_i/\alpha_i)^2}{(x_i/\alpha_i) - 1} \tag{1}$$

Sea $f : \mathbb{R}_{>1} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$. Se nota que f tiene un mínimo estricto en 2, con $f(2) = 4$. O sea, $f(x) \geqslant 4$ para todo $x > 1$ y $f(x) = 0$ si $x = 2$.

Luego, de (1) se obtiene:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{x_{i+1}} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i f\left(\frac{x_i}{\alpha_i}\right) \geqslant 4 \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \ = \ 4$$

valiendo la igualdad cuando $x_i = 2\alpha_i$. Es decir, $x_i = 2(x_i - x_{i+1})$, $x_{i+1} = \dfrac{x_i}{2}$, $x_i = \dfrac{1}{2^i}$ (recordar que $x_0 = 1$).

Luego, como la suma de la serie es $\geqslant 4$, sumando suficientes términos se supera el valor $3,9999$. En el caso en que $x_i = \dfrac{1}{2^i}$, la serie suma 4; luego, sus sumas parciales son siempre estrictamente menores que 4.

Problema 5. (3,2,6)

Solución de Esteban Gregorio Tabak, Facultad de Ingeniería - Universidad de Buenos Aires

Los cuatro primeros valores quedan determinados así:

$f(0) = 0$, si no, $f(n) \geqslant f(n + f(0)) > f(n)$.

$f(1) = 0$, si no, $3333 = f(9999) \geqslant 9999 f(1) > 3333$

$f(2) = 0$, si no, $3333 = f(9999) \geqslant 4999 f(2) + f(1) > 3333$

$f(3) = 1$, pues $3333 f(3) \leqslant f(9999) \leqslant 3333 f(3) + 3332$,

de la primera desigualdad resulta $f(3) \leqslant 1$, de la segunda $f(3) \geqslant 1$.

Lema: Para $n \leqslant 3333$, $f(3n) = n f(3) = n$.

En efecto, por inducción sobre n, para $n = 0$, $f(3n) = f(0) = 0$. Si es válido para $n \leqslant h$:

$$f(3(h+1)) \geqslant f(3h) + f(3) = h + 1$$

y

$$\begin{aligned} f(9999) &= f(3(h+1)+9999-3(h+1)) \\ &\geqslant f(3(h+1))+f(9999-3(h+1)) \\ &\geqslant f(3(h+1))+(3333-(h+1))f(3) \\ &= f(3(h+1))+3333-(h+1) \end{aligned}$$

o sea, $f(3h+1) \leqslant h+1$, con lo que queda probado el lema.

Como $1986 = 3 \times 662$ y $1989 = 3 \times 663$, se tiene:

$$662 = f(1986) \leqslant f(1988) \leqslant f(1989) = 663$$

Tiene que ser $f(1988) = 662$, ya que, en caso contrario:

$$9999 = 5 \times 1988 + 3 \times 19 + 2$$

se tendría:

$$f(9999) \geqslant 5 \times 663 + 19 = 3334$$

Absurdo.

Problema 6. (2,1,9)

Solución de Esteban Gregorio Tabak, Facultad de Ingeniería - Universidad de Buenos Aires

Sea $v(t)$ la velocidad, $a(t)$ la aceleración, $\bar{v}$ la velocidad media y denotemos $v_0(t) = v(t) - v(0)$ y $b = \dfrac{v_0(\frac{T}{2})}{\frac{T}{2}}$.

Se tiene:

$$\bar{v} = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\ dt = v(0) + \frac{1}{T}\int_0^T v_0(t)\ dt$$

Pero:

$$\begin{aligned} \int_0^T v_0(t)\ dt &= \int_0^{T/2} v_0(t)\ dt + \int_{T/2}^T v_0(t)\ dt \\ &= \int_0^{T/2} [bt - (bt - v_0(t))]\ dt + \int_{T/2}^T [bt + (v_0(t) - bt)]\ dt \\ &= \int_0^T bt\ dt + \int_{T/2}^T (v_0(t) - bt)\ dt - \int_0^{T/2} (bt - v_0(t))\ dt \end{aligned}$$

Pero $\displaystyle\int_0^T bt\ dt = \frac{bT^2}{2} = v_0(\tfrac{T}{2})T$, por lo que para ver que $\bar{v} \geqslant v(\frac{T}{2}) = v(0) + v_0(\frac{T}{2})$, basta probar que:

$$\int_{T/2}^T (v_0(t) - bt)\ dt \geqslant \int_0^{T/2} (bt - v_0(t))\ dt \qquad (1)$$

Demostraremos:

$$\int_{T/2}^{T} (v_0(t) - bt)\, dt \geqslant \int_0^{T/2} (a(\tfrac{T}{2}) - b)t\, dt \tag{2}$$

$$\int_0^{T/2} (bt - v_0(t))\, dt \leqslant \int_0^{T/2} (a(\tfrac{T}{2}) - b)t\, dt \tag{3}$$

con lo que la desigualdad (1) quedará demostrada.

(2).

Para $t \geqslant \frac{T}{2}$ se tiene $v_0(t) = v_0(\frac{T}{2}) + \displaystyle\int_{T/2}^{t} a(t)\, dt$ y como $a(t) \geqslant a(\frac{T}{2})$,

$$v_0(t) \geqslant v_0(\tfrac{T}{2}) + a(\tfrac{T}{2})(t - \tfrac{T}{2})$$

Entonces,

$$\int_{T/2}^{T} (v_0(t) - bt)\, dt \geqslant \int_{T/2}^{T} (v_0(\tfrac{T}{2}) + a(t)(t - \tfrac{T}{2}) - bt)\, dt$$

y como $v_0(\frac{T}{2}) = b\frac{T}{2}$, el miembro derecho queda:

$$\int_{T/2}^{T} (a(\tfrac{T}{2}) - b)(t - \tfrac{T}{2})\, dt = \int_0^{T/2} (a(\tfrac{T}{2}) - b)t\, dt$$

lo que termina la demostración de (2).

(3).

Para $t \leqslant \frac{T}{2}$ se tiene $v_0(\frac{T}{2}) = v_0(t) + \int_t^{T/2} a(t)\, dt$ y como $a(t) \leqslant a(\frac{T}{2})$,

$$v_0(\tfrac{T}{2}) \leqslant v_0(t) + a(\tfrac{T}{2})(\tfrac{T}{2} - t)$$

Entonces,

$$\int_0^{T/2} (bt - v_0(t))\, dt \leqslant \int_0^{T/2} (bt - v_0(\tfrac{T}{2}) + a(\tfrac{T}{2})(\tfrac{T}{2} - t))\, dt$$

y como $v_0(\frac{T}{2}) = b\frac{T}{2}$, el miembro derecho queda:

$$\int_0^{T/2} (b - a(\tfrac{T}{2}))(t - \tfrac{T}{2})\, dt = \int_0^{T/2} (a(\tfrac{T}{2}) - b)t\, dt$$

lo que termina la demostración de (3).

Problema 7. (2,2,4)

Solución de Enzo Dari, Instituto Balseiro, Bariloche

Del hecho que la media geométrica es menor (o igual si todos los factores son iguales) que la media aritmética se sigue que el máximo valor posible se da cuando las sumas de los números de cada conjunto son todas iguales. Siempre es posible agrupar n^2 números de esta manera. En ese caso, el máximo valor posible está dado por:

$$\left[\sum_{i=1}^{n^2} \frac{i}{n}\right]^n = \frac{1}{n}\left[\frac{n^2(n^2+1)}{2}\right]^n = \left[\frac{n(n^2+1)}{2}\right]^n$$

La forma de obtener los n conjuntos es la siguiente: se ubican los n^2 números en forma creciente en un cuadrado de $n \times n$ y luego se toman las diagonales. Ilustramos:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{array}$$

Las diagonles son: $\{1, 6, 11, 16\}$, $\{5, 10, 15, 4\}$, $\{9, 14, 3, 8\}$ y $\{13, 2, 7, 12\}$. Otra manera es tomando las otras diagonales, $\{13, 10, 7, 4\}$, $\{9, 6, 3, 16\}$, $\{5, 2, 15, 12\}$ y $\{1, 14, 11, 8\}$. Todas las sumas dan 34.

Problema 8. (7,5,1)

Solución de Gerardo Garbulsky, F.C.E. y N. - Universidad de Buenos Aires

Cada vez que se agrega una nueva recta, ésta corta a las anteriores en puntos diferentes, quedando delimitada una región más por cada par de puntos contiguos de corte. Si a_n ($n \geqslant 3$) denota el número de regiones delimitadas por n rectas, se sigue entonces que $a_n = a_{n-1} + (n-2)$.

Como $a_3 = 1$, se tiene $a_4 = 1 + 2$, $a_5 = 1 + 2 + 3$ y, en general, $a_n = \sum_{i=0}^{n-2} i$. O sea, $a_n = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$.

Composición tipográfica: LaTeX 2ε (http://www.miktex.org)
Gráficos: Tkpaint (http://www.netanya.ac.il/~samy/tkpaint.html)