XVI COMPETENCIA ERNESTO PAENZA
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Problema 1- De cuántas maneras se pueden ordenar los enteros $\{1, 2, \ldots, n\}$ de manera tal que, salvo el primero de la izquierda, todos los enteros difieran en 1 de *alguno* de los enteros que tiene a la izquierda.

Basado en la resolución de Sebastián Freyre y Carlos Sarraute (UBA)

Llamemos *tira* a una ordenación de los enteros $\{1, 2, \ldots, n\}$ que satisface las condiciones pedidas. Si la tira empieza con 1, entonces necesariamente es $(1, 2, \ldots, n)$. Si empieza con n, entonces es $(n, n-1, \ldots, 2, 1)$.

Si la tira empieza con un entero k, $1 < k < n$, los enteros aparecen en la tira siguiendo este esquema

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & & & n \\
 & & & & & & & \nearrow & \\
 & & & & & & \ldots & & \\
 & & & & & \nearrow & & & \\
 & & & & k+1 & & & & \\
 & & & \nearrow & & & & & \\
k & & & & & & & & \\
 & & & \searrow & & & & & \\
 & & & & k-1 & & & & \\
 & & & & & \searrow & & & \\
 & & & & & & \ldots & & \\
 & & & & & & & \searrow & \\
 & & & & & & & & 1
\end{array}
$$

Vale decir que n sólo puede aparecer después de que haya aparecido $n-1$ y ese último después de $n-2$ y así siguiendo hasta k.

De manera similar el 1 sólo puede aparecer después del 2 y éste después del 3, etc. (hasta k).

Esto nos muestra que la tira no puede terminar con un entero x ($k < x < n$) porque n aparece después de x. Tampoco puede terminar con y ($1 < y < k$) porque el 1 aparece después de un tal y.

En todos los casos vemos que la tira termina con 1 ó n.

Ahora veamos que si una tira $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ obedece a las condiciones pedidas, la tira, que podemos llamar "conjugada", $(n+1-a_1, n+1-a_2, \ldots, n+1-a_n)$ también obedece a las condiciones. En efecto, dado un elemento a_k con $1 < k \leq n$ de la tira original, existe l con $1 \leq l < k$ tal que $a_k = a_l \pm 1$.

Notemos $b_k = n+1-a_k$ a los elementos de la tira conjugada. Dado b_k con $1 \leq k \leq n$, existe l con $1 \leq l < k$, tal que $b_k = n+1a_k = n+1-(a_l \pm 1) = (n+1-a_l) \pm 1 = b_l \pm 1$.

Por lo tanto, tenemos una cantidad par de tiras: una mitad termina con 1, la otra mitad termina con n (cada tira que termina con n es la conjugada de una tira que termina con 1).

Ahora veamos por inducción que la cantidad de tiras es 2^{n-1} para $n \geq 2$.

Para $n = 2$, las tiras son $(1, 2)$ y $(2, 1)$. Son $2 = 2^{2-1}$.

Supongamos que la hipótesis vale para n. Las tiras de $n + 1$ enteros que terminan con $n + 1$ son todas las tiras de n enteros a las cuales agregamos el elemento $n + 1$ al final. Su cantidad es, por hipótesis inductiva, 2^{n-1}. Las tiras de $n + 1$ enteros que terminan con 1 son tantas como las que terminan con $n + 1$ (por conjugación). Su cantidad es también 2^{n-1}.

En total tenemos $2.2^{n-1} = 2^n = 2^{(n+1)-1}$ ordenamientos de $n + 1$ enteros.

Concluimos que la cantidad de ordenamientos (que obedezcan a las condiciones pedidas) de n enteros es 2^{n-1}.

Problema 2- Sean $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$ y $P_3 = (x_3, y_3)$ puntos del plano, con $x_1 < x_2 < x_3$. Sea R el radio de la circunferencia que pasa por P_1, P_2 y P_3.

i. Probar que si $R \neq \infty$, entonces

$$\frac{1}{R} < 2 \left| \frac{y_1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{y_2}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)} + \frac{y_3}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \right|.$$

ii. Probar que 2 es la menor constante que se puede poner en el miembro derecho de la desigualdad.

Basado en la resolución de Martín Safe y Juan Pablo Casal (Univ. Nac. del Sur)

i. Probemos que si a, b, c son los lados de un triángulo, R es el radio de la circunferencia circunscripta y A, su área, entonces

$$A = \frac{abc}{4R}.$$

En efecto, como $A = \frac{1}{2} ab \sin\gamma = \frac{1}{2} bc \sin\alpha = \frac{1}{2} ac \sin\beta$ donde α, β y γ son los ángulos comprendidos entre los lados de longitudes a y b, b y c, a y c respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} A^3 &= \frac{1}{2} ab \sin\gamma \frac{1}{2} bc \sin\alpha \frac{1}{2} ac \sin\beta = \\ &= \frac{1}{8} a^2 b^2 c^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = \\ &= \frac{1}{8} a^3 b^3 c^3 \frac{\sin\alpha}{a} \frac{\sin\beta}{b} \frac{\sin\gamma}{c} \end{aligned}$$

y como

$$2R = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

entonces

$$A^3 = \frac{1}{8} a^3 b^3 c^3 \frac{1}{2R} \frac{1}{2R} \frac{1}{2R} = \frac{a^3 b^3 c^3}{64 R^3}$$

de donde resulta

$$A = \frac{abc}{4R}$$

como queríamos probar.

Supóngase ahora que los vértices de un triángulo de lados a, b y c tienen coordenadas $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, $x_1 < x_2 < x_3$, R el radio de su circunferencia circunscripta y A su área, entonces

$$\frac{1}{R} = \frac{4A}{abc} = \frac{2}{abc}2A = \frac{2}{abc}\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$$

y, como $x_2 - x_1, x_3 - x_2$ y $x_3 - x_1$ son las proyecciones de los lados a, b y c sobre el eje x y no pueden ser los tres lados paralelos (ya que $R \neq \infty$) entonces alguna de las proyecciones es menor que el lado correspondiente y por lo tanto:

$$abc > (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) > 0$$

y reemplazando se obtiene

$$\frac{1}{R} = \frac{2}{abc}\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} < \frac{2}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = 2\left|\frac{\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}\right|$$

$$= 2\left|\frac{y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}\right| =$$

$$= 2\left|\frac{y_1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{y_2}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)} + \frac{y_3}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}\right|.$$

Probamos, entonces que

$$\frac{1}{R} < 2\left|\frac{y_1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{y_2}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)} + \frac{y_3}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}\right|$$

como queríamos.

ii. Consideremos $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, \epsilon)$ y $P_3 = (2, 0)$, donde $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$. Entonces $R \neq \infty$ porque P_1, P_2 y P_3 no están alineados.

Tenemos en este caso que $a = |P_2P_3| = \sqrt{\epsilon^2 + 1}$, $b = |P_1P_3| = 2$, que $c = |P_2P_3| = \sqrt{\epsilon^2 + 1}$ y $A = \frac{1}{2}2\epsilon = \epsilon$. Por lo tanto, por la fórmula de i) tenemos

$$\frac{1}{R} = \frac{4A}{abc} = \frac{4\epsilon}{2\sqrt{\epsilon^2 + 1}^2} = \frac{2\epsilon}{\epsilon^2 + 1}$$

mientras que

$$\left|\frac{y_1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{y_2}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+\frac{y_3}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right|=\frac{\epsilon}{1}.$$

Sea K tal que

$$\frac{1}{R}<K\left|\frac{y_1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{y_2}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+\frac{y_3}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right|$$

en general.

En particular debe verificar que

$$\frac{2\epsilon}{\epsilon^2+1}<K\epsilon$$

para todo $\epsilon\neq 0$, lo que implica que

$$K>\frac{2}{\epsilon^2+1}$$

para todo $\epsilon\neq 0$.

Por lo tanto $K\geq\lim\limits_{\epsilon\to 0}\dfrac{2}{\epsilon^2+1}=2$, como queríamos probar.

Problema 3- Sean $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio de grado n con todas sus raíces reales y $a > 0$. Probar que la longitud del conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} : \frac{p'(x)}{p(x)} \geq a\} \subset \mathbb{R}$ es igual a $\frac{n}{a}$.

Basado en la resolución de Gabriel Tucci Scuadroni y Valentina Vega (Fac. Ciencias, Uruguay)

Sea $p(x) = a_n(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$.

$$p'(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p(x)}{x - \alpha_i}$$

$$\frac{p'(x)}{p(x)} \geq a \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - \alpha_i}$$

Miremos cómo es $\frac{p'(x)}{p(x)}$ cuando se la restringe al intervalo (α_i, α_{i+1}):

$$\lim_{x \to \alpha_i^+} \frac{p'(x)}{p(x)} = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to \alpha_{i+1}^-} \frac{p'(x)}{p(x)} = -\infty \text{ y } \left(\frac{p'(x)}{p(x)}\right)' = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(x - \alpha_j)^2} < 0$$

Por lo tanto, $\frac{p'(x)}{p(x)}$ decrece y existe un único $\beta_i \in (\alpha_i, \alpha_{i+1})$ tal que $\frac{p'(\beta_i)}{p(\beta_i)} = a$.

En $(-\infty, \alpha_1)$, $\frac{p'(x)}{p(x)} < 0$.

En $(\alpha_n, +\infty)$ tenemos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{p'(x)}{p(x)} = 0^+$$

y $\frac{p'(x)}{p(x)}$ también decrece, por lo tanto, existe un único $\beta_n \in (\alpha_n, +\infty)$ tal que $\frac{p'(\beta_n)}{p(\beta_n)} = a$.

Tenemos entonces que $\beta_1, \dots, \beta_n$ son las raíces del polinomio $p(x) - ap'(x)$.

El conjunto S va a ser de la forma $\cup(\alpha_i, \beta_i]$.

Entonces, la longitud total de S será:

$$(\beta_1 - \alpha_1) + \dots + (\beta_n - \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

Si $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$, entonces $\sum \alpha_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$.

Además, $p(x) - ap'(x) = aa_n x^n + (aa_{n-1} - na_n)x^{n-1} + \dots + (a_0 - aa_1)$ y $\sum \beta_i = \frac{na_n - aa_{n-1}}{aa_n}$.

Entonces, $\sum \beta_i - \sum \alpha_i = \frac{n}{a} - \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{n}{a}$.

Problema 4- Una sucesión de números reales $a_1, a_2, \ldots$ se dice que cumple la propiedad *up-down* si

$$a_1 > a_2, a_2 < a_3, a_3 > a_4, a_4 < a_5, \ldots$$

Probar que

$$\sec x + \tan x = \sum_{n \geq 0} \frac{A_n}{n!} x^n,$$

donde A_n es la cantidad de permutaciones del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ que verifican la propiedad up-down.

Por ejemplo, $A_4 = 5$*, y las* 5 *permutaciones up-down son las siguientes:* $(4231)(4132)(2143)(3241)(3142)$.

Basado en la resolución de Jonathan Barmak y Martín Mereb (UBA)

$$\frac{1}{\cos x} + \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x}.$$

Quiero ver que

$$1 + \sin x = \left(\sum \frac{A_n}{n!} x^n \right) \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots \right).$$

Esto es ver que

$$\sum_{k: n = k + 2m} A_k \frac{(-1)^m}{(2m)! k!} = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \text{ par} \\ \frac{(-1)^{[\frac{n}{2}]}}{n!} & n \text{ impar} \end{cases}$$

Esto es lo mismo que decir que

$$\sum_{k: n = k + 2m} A_k (-1)^m \binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \text{ par} \\ (-1)^{[\frac{n}{2}]} & n \text{ impar} \end{cases}$$

Tratemos de hallar una fórmula recursiva para A_n.

Primero, el número n lo puedo poner en cualquier posición impar k. Los números a su izquierda forman una sucesión up-down de longitud $k - 1$. Como esta condición sólo está dada por el orden de sus elementos puedo hacer de cuenta que son los números del 1 al $k - 1$ y tengo A_{k-1} formas de armarme esa cadenita. Como son $k - 1$ números de los $n - 1$ números $1, \ldots, n - 1$, los puedo elegir de $\binom{n-1}{k-1}$ formas distintas y una vez hecho esto, los colocamos a la izquierda de n según el orden dado por la permutación up-down de A_{k-1}. Lo mismo para los números a la derecha de n que son $n-k$.

Entonces

$$A_n = \sum_{k \geq n \text{ impar}} \binom{n-1}{k-1} A_{k-1} A_{n-k} \tag{1}$$

$$\binom{n-1}{k-1} A_{k-1} A_{n-k} = \frac{A_{k-1}}{k!} \frac{A_{n-k}}{(n-k)!} (n-1)! k.$$

Como $A_n < n! = \sharp S_n$, entonces $f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{A_n}{n!} x^n < \sum_{n \geq 0} x^n$ y converge uniforme y absolutamente en cualquier bola de centro cero y radio menor que 1.

Razonando como en (1), podemos considerar B_n como la cantidad de sucesiones up-down y down-up (donde $\{x_i\}$ es down-up si, y sólo si, $\{-x_i\}$ es up-down) de $\{1, \ldots, n\}$ y vemos que $B_n = 2A_n$ porque si tengo $\{x_i\}$ una sucesión up-down y considero $\{n - x_i\}$ resulta ser down-up.

Entonces, elijo un lugar k para el número n (ahora puede ser k par o impar) y elijo los números a la derecha y a la izquierda como antes, de $\binom{n-1}{k-1} A_{k-1} A_{n-k}$ formas y llego a que, para todo $n \geq 2$:

$$2A_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} A_{k-1} A_{n-k} \tag{2}$$

y a que $A_0 = A_1 = 1$.

$$\binom{n-1}{k-1} A_{k-1} A_{n-k} = (n-1)! \frac{A_{k-1}}{(k-1)!} \frac{A_{n-k}}{(n-k)!}$$

entonces

$$f(x) f(x) = \left(\sum \frac{A_n}{n!} x^n \right)^2 = \sum g_n x^n$$

donde $g_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_{k-1}}{(k-1)!} \frac{A_{n-k}}{(n-k)!}$ (reagrupando por términos de igual grado).

Es decir que $g_{n-1} = \frac{\sum_{k=1}^{n} A_{k-1} A_{n-k} \binom{n-1}{k-1}}{(n-1)!} = \frac{2A_n}{(n-1)!}$ para $n \geq 2$.

Entonces

$$(f(x))^2 = \left(\sum \frac{2A_{n+1}}{n!} x^n \right) - 1 = 2f'(x) - 1. \tag{3}$$

Como $\dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{\sin x}{\cos x} = \sec x + \tan x$

$$\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}$$

y

$$\left(\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\right)^2 = 2\frac{1+\sin x}{\cos^2 x} - 1.$$

Resulta que $h(x) = \dfrac{1+\sin x}{\cos^2 x}$ cumple con la ecuación diferencial $h^2 = 2h' - 1$.

Si puedo probar que $f(x) = \sum \frac{A_n}{n!} x^n$ también es solución, como coinciden en $x = 0$, por teorema de existencia y unicidad $f(x)$ tiene que coincidir con $h(x)$ en algún entorno del origen.

Pero en (3) ya vimos que así sucedía. Entonces $f(x) \equiv h(x)$ en el mayor intervalo donde alguna esté definida.

Problema 5- Demostrar que, $\forall n \in \mathbb{N}$, vale que

$$\prod_{j=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{\pi j}{2n}\right) = \frac{n}{2^{2n-2}}.$$

Basado en la resolución de Reimundo Heluani y Pablo Celayes (FaMAF)

Consideremos $P(z) = z^{4n} - 1$, sea w la raíz de $P(z)$ compleja $\neq 1$ de menor argumento. Las $4n$ raíces de $P(z)$ son $1, w, w^2, \ldots, w^{2n-1}, -1, -w, w^2, \ldots, -w^{2n-1}$.

Ahora, si $\theta = \frac{\pi}{2n} = \frac{2\pi}{4n}$ se tiene que $w^j = \cos(\theta j) + i\sin(\theta j)$, $w^{-j} = \cos(-\theta j) + i\sin(-\theta j) = \cos(\theta j) - i\sin(\theta j)$ y luego $w^j - W^{-j} = 2i\sin(\theta j)$.

Ahora

$$\prod_{j=1}^{2n-1}(w^j - w^{-j}) = \prod_{j=1}^{2n-1} 2i\sin(\theta j) = 2^{2n-1}i^{2n-1}\prod_{j=1}^{2n-1}\sin(\theta j) \quad (A)$$

Pero

$$\prod_{j=1}^{2n-1}(w^j - w^{-j}) = \prod_{j=1}^{2n-1} w^{-j}(w^{2j} - 1) = w^{-\left(\sum_{j=1}^{2n=1} j\right)}\prod_{j=1}^{2n-1}(w^{2j} - 1 = w^{-(2n-1)n}\prod_{j=1}^{2n-1}(w^{2j} - 1) \quad (B)$$

Además $w^n = i$ y $w^{-(2n-1)n} = i^{-2n+1}$.

De (A) y (B) deducimos la siguiente identidad:

$$2^{2n-1}i^{2n-1}\prod_{j=1}^{2n-1}\sin(\theta j) = i^{-(2n-1)}\prod_{j=1}^{2n-1}(w^{2j} - 1)$$

$$\Rightarrow 2^{2n-1}i^{4n-2}\prod_{j=1}^{2n-1}\sin(\theta j) = \prod_{j=1}^{2n-1}(w^{2j} - 1)$$

$$\Rightarrow (-1)2^{2n-1}\prod_{j=1}^{2n-1}\sin(\theta j) = \prod_{j=1}^{2n-1}(-1)(1 - w^{2j}) = (-1)^{(2n-1)}\prod_{j=1}^{2n-1}(1 - w^{2j}) = (-1)\prod_{j=1}^{2n-1}(1 - w^{2j})$$

Tenemos entonces

$$2^{2n-1}\prod_{j=1}^{2n-1}\sin(\theta j)=\prod_{j=1}^{2n-1}(1-w^{2j})\quad (C)$$

Ahora, si w^j es una raíz de $P(z)$, se tiene que $(w^{2j})^{2n}-1=0$, de donde w^{2j} es raíz de $Q(z)=z^{2n}-1$. Las raíces de $Q(z)$ son $1, w^2, w^4, \ldots, w^{2(2n-1)}$ y tenemos

$$Q(z)=(z=1)(z-w^2)(z-w^4)\ldots(z-w^{2(2n-1)}=(z-1)\prod_{j=1}^{2n-1}(z-w^{2j}).$$

Además existe la factorización

$$Q(z)=(z-1)(1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{2n-1}).$$

Luego, se cumple la identidad

$$\prod_{j=1}^{2n-1}z-w^{2j}=\sum_{k=0}2n-1z^k.$$

Evaluando en $z=1$ resulta

$$\prod_{j=1}^{2n-1}1-w^{2j}=\sum_{k=0}^{2n-1}1^k=2n.$$

Reemplazando en (C) llegamos a

$$2^{2n-1}\prod_{j=1}^{2n-1}\sin(\theta j)=2n\Rightarrow\prod_{j=1}^{2n-1}\sin(\theta j)=\frac{2n}{2^{2n-1}}\Rightarrow\prod_{j=1}^{2n-1}\sin(\theta j)=\frac{n}{2^{2n-2}}.$$

Problema 6- Sea $\emptyset \neq \mathbb{T} \subset \mathbb{R}$, que no contiene ningún intervalo. Dos personas, A y B, juegan el siguiente juego:

- A elige arbitratiamente un intervalo cerrado $I_1 \subset \mathbb{R}$ de longitud positiva.
- Inmediatamente después, B elige arbitrariamente un subintervalo cerrado $I_2 \subset I_1$, de longitud positiva.
- Inmediatamente después, A elige arbitrariamente un subintervalo cerrado $I_3 \subset I_2$ de longitud positiva.
- Y así sucesivamente. Al "finalizar" el juego, se calcula $I := \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Si $I \bigcap \mathbb{T} \neq \emptyset$, entonces gana A. De otro modo, gana B.

a) Si $\mathbb{T} = \mathbb{Q}$ probar que que B tiene una estrategia para ganar siempre sin importar lo que haga A.

b) Encontrar un conjunto $\mathbb{T}$ que cumpla con las condiciones del enunciado para el cual A tenga una estrategia para ganar siempre, sin importar lo que haga B. Demuestre que $\mathbb{T}$ cumple con lo pedido.

c) Si $\mathbb{T} = \{x \in [0,1] : x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ con $a_n \in \{0,1,2\}$, y $\exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n \in \{0,2\} \forall n \geq n_0\}$ se sabe que uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora. Determine cuál es y demuéstrelo.

Basado en la resolución de Franco Grimoldi y Mariana Prieto (Univ. Nac. del Sur)

a) A elige cualquier intervalo I_1 cerrado y de longitud positiva. B elige alguna forma de numerar los números racionales de manera efectiva. Por ejemplo de la siguiente manera: (eliminando en cada paso la fracción correspondiente si no fuera irreducible). La sucesión empezaría:

$$q_1 = 1, q_2 = 2, q_3 = \frac{1}{2}, q_4 = \frac{1}{3}, q_5 = 3, q_6 = 4, q_7 = \frac{3}{2}, q_8 = \frac{2}{3}, \ldots$$

Ahora B elige un subintervalo I_2 de I_1 que **no** contenga al cero y de diámetro menor que 1.

A elige cualquier subintervalo $I_3 \subset I_2$, cerrado, de longitud positiva.

B elige un subintervalo I_4 de I_3 (de ahora en más, cada vez que digo subintervalo quiero decir subintervalo cerrado de longitud positiva) que **no** contenga a q_1 ni a $-q_1$ de diámetro menor que $\frac{1}{2}$.

La siguiente vez que le toca a B, elige un subintervalo que no contiene a q_2 ni a $-q_2$ y de diámetro menor que $\frac{1}{4}$.

Sucesivamente elige subintervalos que no contengan a q_3 ni a $-q_3$, q_4 ni $-q_4$, ... y de diámetros menores que $\frac{1}{2^3}$, $\frac{1}{2^4}$, etc.

La sucesión de intervalos así construida es de intervalos cerrados, encajados con $\text{diam}(I_n) \to 0$ $(n \to \infty)$. Entonces

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = r \in \mathbb{R}.$$

Si r fuera racional, sería $0, q_n$ o $-q_n$ para algún n. Pero B dejó a $0, q_n$ y $-q_n$ fuera de la sucesión de intervalos en su $(n+1)-$ésimo turno. Luego $r \notin \mathbb{Q}$ y ganó B.

b) Sea $\mathbb{T} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. El conjunto de los irracionales.

A elige el intervalo $[0,1]$.

B elige cualquier subintervalo de $[0,1]$.

Ahora A está en iguales condiciones que B en el juego anterior. Entonces tiene una estrategia para que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ sea un irracional y de esta manera gana independientemente de lo que haga B.

c) A la representación $x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ con $a_n \in \{0,1,2\}$ la llamo en base 3 de x. Para ciertos números dicha representación no es única, pero en este caso no tiene importancia.

El conjunto $\mathbb{T}$ definido, es el de todos los números cuya representación tiene una cantidad finita de unos. El complemento de $\mathbb{T}$, es decir, $[0,1] \setminus \mathbb{T}$ es el conjunto de todos los números cuya representación tiene infinitos unos.

Los únicos números que admiten dos representaciones son lo que terminan en infinitos 2's o en infinitos 0's, por lo que no afecta la definición de $\mathbb{T}$.

Veamos que el ganador es B.

A elige un intervalo $[a,b]$. Si $a < 0$ ó $b > 1$, B elige un subintervalo de $[a,b]$ que no intersecta al $[0,1]$ y entonces no intersecta a $\mathbb{T}$ y se asegura la victoria.

Supongamos entonces que $[a,b] \subseteq [0,1]$:

Notación: Si $x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ entonces escribo $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$.

La notación es buena ya que se comporta como el sistema decimal y además vale la regla:

$$0,0222222\cdots = 0,1$$

Para evitar problemas, los números que terminan con una cadena de 2's los represento por los equivalentes que terminan en 0's.

Como $a < b$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $b - a > \frac{1}{3^{n_1}}$.

a se escribe $a = a_0, a_1 a_2 \ldots a_{n_1} a_{n_1+1} \ldots$

Si alguno de los $a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, \ldots, a_{n_1+k}$ fuera un cero, B elige el intervalo

$$[a_0, a_1 \dots a_{n_1} \dots 1;\ a_0, a_1 \dots a_{n_1} \dots 11] = [\alpha_1, \beta_1]$$

donde el 1 aparece en la posición en que aparecía el cero. Es claro que $\beta_1 - \alpha_1 < \frac{1}{3^{n_1}}$.

Si ninguno de los $a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, \dots$ fuera cero, tendría que haber infinitos unos.

Suponiendo que hay un uno en la posición m_1-ésima y otro en la $m_1 + k$-ésima, B elige el intervalo

$$[a_0, a_1 \dots a_{n_1} \dots 1 \dots 1;\ a_0, a_1 \dots a_{n_1} \dots 1 \dots 2] = [\alpha_1, \beta_1]$$

y entonces $[\alpha_1, \beta_1] \subset [a, b]$.

Lo que hizo B fue conseguir un subintervalo de la forma $[a_0, a_1 \dots a_{m_1-1} 1 \dots;\ a_0, a_1 \dots a_{m_1-1} 1 \dots]$ donde los extremos coinciden en los primeros m_1 dígitos y el dígito a_{m_1} es un 1.

Cuando A extraiga un subintervalo de $[\alpha_1, \beta_1]$ tiene que dejar invariantes los m_1+1 primeros dígitos de ambos extremos y por lo tanto, dejar fijo el 1 que "plantó" B.

En su siguiente jugada B repite el procedimiento anterior, aumentando la cantidad de dígitos invariantes y agregando un 1.

De esta manera $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n$.

Pero, por la construcción de la sucesión α_n, $\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$ tiene infinitos unos en su representación y por lo tanto no pertenece a $\mathbb{T}$ y gana B.