IV COMPETENCIA MATEMATICA ERNESTO PAENZA

28 DE AGOSTO DE 1989

EJERCICIOS

Problema 1.

Dado un polígono convexo cerrado R en el plano de área A y perímetro P, sea $d(x, y)$ la distancia del punto $(x, y) \in$ PLANO al punto más cercano de R.

Pruebe que existen constantes a, b, c *independientes de* R (y encuéntrelas) tales que:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-d(x,y)}\ dxdy = a + bP + cA$$

Problema 2.

Fijado $m \in \mathbb{N}$, hallar todos los valores posibles de números naturales a, b, c, d, k tales que:

(i) a, b, c, d son impares

(ii) $0 < a < b < c < d$

(iii) $a + d = 2^k$

(iv) $b + c = 2^m$

(v) $a.d = b.c$

Problema 3.

Una partición de número natural n es una descomposición de n como suma de uno o más números naturales. Descomposiciones que difieren sólo en el orden definen la misma partición (por ejemplo, si $n = 3$, las posibles particiones son $1 + 1 + 1$; $1 + 2$; 3).

Fijados $n \in \mathbb{N}$ y π una partición de n, sean

$A(\pi) =$ cantidad de "1" que intervienen en π

$B(\pi) =$ cantidad de números distintos que intervienen en π

Probar que

$$\sum_{\pi} A(\pi) = \sum_{\pi} B(\pi)$$

donde π recorre todas las particiones de n.

Problema 4.

Pruebe que $\left\{ x \in \mathbb{R} \Big/ \sum_{k=1}^{50} \frac{k}{x-k} \geqslant \frac{25}{39} \right\}$ es una unión de intervalos disjuntos cuyas longitudes suman 1989.

Problema 5.

Un punto P se mueve dentro del cuadrado unitario en línea recta y a velocidad unitaria (o sea, en tiempo t, recorre una distancia t). Cuando encuentra un vértice, se escapa. Cuando encuentra una arista, su trayectoria se refleja en forma tal que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión. Llamemos $n_{P_0}(t)$ al número de direcciones iniciales para un punto interior P_0 fijo para el cual P_0 se escapa en tiempo menor o igual que t.

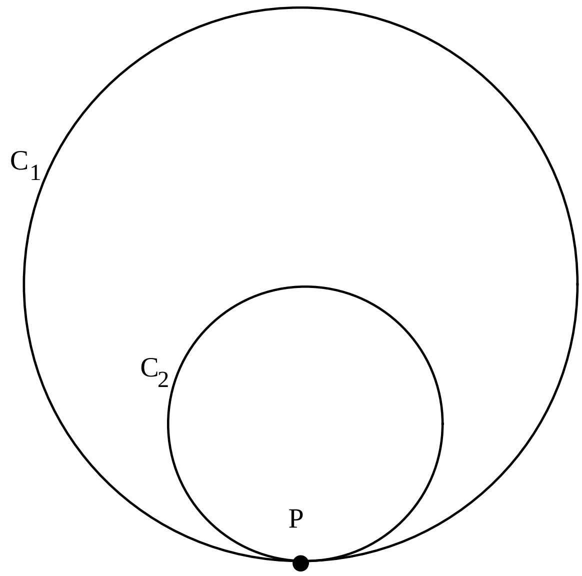
Encuentre la *menor* constante a para la cual existen constantes b y c tales que

$$n_{P_0}(t) \leqslant a.t^2 + b.t + c$$

para todo $t > 0$ y todo P_0 interior.

Problema 6.

Se tienen dos círculos C_1 y C_2 de manera tal que el radio de C_1 es el doble del radio de C_2. Los círculos están dispuestos como indica la figura, en donde P es el punto de apoyo.



Si uno hace girar el círculo C_2 hacia la derecha, manteniendo siempre un punto de apoyo sobre C_1, el punto P describe una cierta trayectoria. Se pide que describa la trayectoria del punto P cuando C_2 volvió a su lugar inicial y luego, que demuestre su afirmación.

Composición tipográfica: LaTeX 2_ε (http://www.miktex.org)
Gráficos: Tkpaint (http://www.netanya.ac.il/~samy/tkpaint.html)