Competencia Matemática Ernesto Paenza

18° REALIZACIÓN — 28 DE AGOSTO DE 2003

Participante N°:

---

1 - Se quieren unir 4 ciudades con cables de manera que dos ciudades cualesquiera estén conectadas (no necesariamente de manera directa). Se pueden agregar postes auxiliares donde converjan tres o más cables, pero se quiere hacer de manera que el cable usado tenga la menor longitud posible.

(i) Probar que en una configuración mínima, dos cables que convergen a un poste auxiliar forman ángulos de al menos 120 grados.

(ii) Describir las posibles configuraciones mínimas cuando la ubicación de las 4 ciudades coincide con los 4 vértices de un rectángulo.

2- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ una función derivable que satisface $f(0) = 1$, $f'(0) < 0$, $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Sea a_0 un número real positivo. A partir de a_0 se define la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la manera siguiente: $a_{n+1} := a_n f(a_n)$, $n = 0, 1, \ldots$.

Demostrar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} {a_n}^2$ converge.

---

3 - Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{N}_{\geq 0} \to \mathbb{N}_{\geq 0}$ que satisfacen

$$f(m^2 + n^2) = f(n)^2 + f(m)^2, \ \forall m, n \in \mathbb{N}_{\geq 0}.$$

---

4 - Consideremos la siguiente matriz infinita de números reales

$$H := \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & \ldots \\ h_2 & h_3 & h_4 & \ldots \\ h_3 & h_4 & h_5 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Demostrar que el $\mathbb{R}$-espacio vectorial generado por las filas de H tiene dimension finita si y solo si existen polinomios P, Q tales que $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} h_j x^j = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

---

5 - Sean α y β dos números reales positivos. Demostrar que se tiene la siguiente unión disjunta

$$\mathbb{N} = \{[m\alpha], \, m \in \mathbb{N}\} \overset{\circ}{\bigcup} \{[n\beta], \, n \in \mathbb{N}\}$$

si y solamente si α y β son irracionales y $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ ($[x]$ denota la parte entera de x).

---

6 - Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable que verifica lo siguiente: $f(x) \geq 0$, $f''(x) \leq 0$, $\forall x \in (0, 1)$, $\int_0^1 f(t)\, dt = 1$. Probar que para todo $x \in (0\,,\,1)$ vale que

$$\left(\int_0^x f(t)dt\right)\left(\int_x^1 f(t)dt\right) \leq \frac{1}{4} f(x).$$

Nota: Se asigna puntaje no nulo a argumentos conducentes a una solución, casos particulares, respuestas correctas no justificadas, etc. Por otro lado, para obtener el máximo puntaje en un ejercicio, es necesario justificar apropiadamente la respuesta.