Competencia Matemática Ernesto Paenza

17° REALIZACIÓN — 28 DE AGOSTO DE 2002

Participante N°:

---

1 - Encuentre el menor valor posible de $|12^m - 5^n|$, donde m y n son enteros positivos.

---

2 - Determinar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:

Sean α, β, γ números reales positivos tales que $\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma)$ son racionales y $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Entonces existe un triángulo de lados enteros cuyos ángulos interiores son α, β y γ.

---

3 - Definimos la función $f : [0,1] \to [0,1]$ de la siguiente manera: $f(1) = 1$, y si $a = 0, a_1a_2a_3a_4\dots$ es la representación decimal de a, definimos

$$f(a) = 0, 0a_10a_20a_30a_4\dots$$

En el caso en que haya dos posibles escrituras del mismo número por repetición de nueves, "elegimos" la que "termina" (por ejemplo, si $b = 0, 09999\dots9\dots$, lo tomamos como $0, 1$).
Estudie la continuidad de f en cada uno de los puntos del intervalo $[0, 1]$.

---

4 - Sean $A \subset B$ convexos acotados en el plano, cuyos bordes son la imagen de una curva rectificable. Pruebe que la longitud del borde de A es menor o igual que la longitud del borde de B.*

---

5 - La sucesión de enteros $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está definida de la manera siguiente: $a_1 = 2$, $a_2 = 7$, y

$$-\frac{1}{2} < a_{n+1} - \frac{a_n^2}{a_{n-1}} \leq \frac{1}{2} \quad \forall n \geq 2.$$

Pruebe que, $\forall n > 1$, a_n es impar.

---

6 - Para cada $n \in \mathbb{N}$, llamemos m_n al máximo valor que toma la función "determinante" sobre todas las matrices cuadradas de tamaño $n \times n$ cuyos coeficientes son 1 ó -1 (por ejemplo, $m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = 4$). Defina una función $f(n)$, tan explícitamente como pueda, que verifique $m_n \leq f(n)\, \forall n \in \mathbb{N}$, y $m_n = f(n)$ para infinitos valores de n.

(Está claro que existen infinitas funciones $f(n)$ que cumplen con las condiciones del enunciado. Se dará puntaje máximo a aquellos que encuentren la mejor de las cotas óptimas entre todos los que resuelvan este problema)

---

* *Un conjunto C se dice* **convexo** *si para cualquier par de puntos c_1, c_2 pertenecientes a C, el segmento con extremos en esos puntos está totalmente contenido en C.*
Una curva continua $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ se dice **rectificable** *si existe un número real ℓ tal que para toda partición $\{0 = c_0, c_1 \dots, c_n = 1\}$ del $[0,1]$, vale la acotación $\sum_{i=0}^{n-1} \|f(c_i) - f(c_{i+1})\| \leq \ell$. En este caso, se define la* **longitud** *de la curva como el supremo de estas sumas, es decir la mínima cota ℓ posible.*

Nota: Se asigna puntaje no nulo a argumentos conducentes a una solución, casos particulares, respuestas correctas no justificadas, etc. Por otro lado, para obtener el máximo puntaje en un ejercicio, es necesario justificar apropiadamente la respuesta.