Competencia Matemática Ernesto Paenza

16° REALIZACIÓN — 28 DE AGOSTO DE 2001

Participante $N°$:

---

1 - ¿De cuántas maneras se pueden ordenar los enteros $\{1, 2, \cdots, n\}$ de manera tal que, salvo el primero de la izquierda, todos los enteros difieran en 1 de *alguno* de los enteros que tiene a la izquierda?

---

2 - Sean $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ y $P_3 = (x_3, y_3)$ puntos en el plano, con $x_1 < x_2 < x_3$. Sea R el radio de la circunferencia que pasa por P_1, P_2 y P_3.
a) Probar que si $R \neq \infty$, entonces

$$\frac{1}{R} < 2\left|\frac{y_1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{y_2}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)} + \frac{y_3}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}\right|.$$

b) Probar que 2 es la menor constante que se puede poner en el miembro derecho de la desigualdad.

---

3 - Sean $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio de grado n con todas sus raíces reales y $a > 0$. Probar que la longitud del conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} : \frac{p'(x)}{p(x)} \geq a\} \subset \mathbb{R}$ es igual a $\frac{n}{a.}$

---

4 - Una sucesión de números reales $a_1, a_2, \ldots$ se dice que cumple la propiedad *up-down* si

$$a_1 > a_2,\ a_2 < a_3,\ a_3 > a_4,\ a_4 < a_5,\ \ldots.$$

Probar que

$$\sec x + \operatorname{tg} x = \sum_{n \geq 0} \frac{A_n}{n!}\, x^n,$$

donde A_n es la cantidad de permutaciones del conjunto $\{1, 2, \cdots, n\}$ que verifican la propiedad up-down. *Por ejemplo,* $A_4 = 5$, *y las* 5 *permutaciones up-down son las siguientes:* (4231) (4132) (2143) (3241) (3142).

---

5 - Demostrar que, $\forall n \in \mathbb{N}$, vale que

$$\prod_{j=1}^{2n-1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi j}{2n}\right) = \frac{n}{2^{2n-2}}.$$

---

6 - Sea $\emptyset \neq \mathbb{T} \subset \mathbb{R}$, que no contiene ningún intervalo. Dos personas, A y B, juegan al siguiente juego:
- A elige arbitrariamente un intervalo cerrado $I_1 \subset \mathbb{R}$ de longitud positiva.
- Inmediatamente después, B elige arbitrariamente un subintervalo cerrado $I_2 \subset I_1$, de longitud positiva.
- Inmediatamente después, A elige arbitrariamente un subintervalo cerrado $I_3 \subset I_2$ de longitud positiva.
- Y así sucesivamente. Al "finalizar" el juego, se calcula $I := \cap_{n=1}^{\infty} I_n$. Si $I \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$, entonces gana A. De otro modo, gana B.
a) Si $\mathbb{T} = \mathbb{Q}$, probar que B tiene una estrategia para ganar siempre, sin importar lo que haga A.
b) Encontrar un conjunto $\mathbb{T}$ que cumpla con las condiciones del enunciado para el cual A tenga una estrategia para ganar siempre, sin importar lo que haga B. Demuestre que $\mathbb{T}$ cumple con lo pedido.
c) Si $\mathbb{T} = \{x \in [0,1] : x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{3^n},\ \text{con}\, a_n \in \{0,1,2\},\ \text{y}\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n \in \{0,2\} \forall n \geq n_0\}$, se sabe que uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora. Determine cuál es y demuéstrelo.

Nota: Se asigna puntaje no nulo a argumentos conducentes a una solución, casos particulares, respuestas correctas no justificadas, etc. Por otro lado, para obtener el máximo puntaje en un ejercicio, es necesario justificar apropiadamente la respuesta.