Funciones Trigonométricas

por Leandro Caniglia

1. Definiciones e indefiniciones

Cuando decimos que el seno de un ángulo es el cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa estamos dando una visión geométrica correcta pero insuficiente de esta función trigonométrica. Comprender cabalmente qué significa la función seno es bastante más que conocer su descripción visual. Las propiedades de las funciones trigonométricas, como su desarrollo en serie de potencias, la existencia de inversas locales, la fórmula de la suma, las ecuaciones que verifican sus derivadas, etc. no se alcanzan a ver desde la perspectiva del cateto opuesto sobre la hipotenusa. Describir las funciones trigonométricas, también significa describir sus propiedades algebráicas y analíticas. Si queremos comenzar desde el principio tendríamos que empezar dando buenas definiciones. Esto no significa olvidar los argumentos con triángulos rectángulos, sino profundizar nuestro conocimiento de las propiedades relevantes. De paso, vamos a llevarnos la sorpresa de "descubrir" un tema que nada tiene de aburrido.

2. La ecuación diferencial

Llamemos $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ al conjunto de funciones de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ con "infinitas" derivadas. Dentro de este conjunto vamos a pensar en todas las funciones f que verifican:

$$D^2 f + f = 0 \tag{$*$}$$

donde $D^2 f$ es la derivada segunda de f. Esta ecuación $(*)$ es una "ecuación diferencial" porque la incógnita f aparece relacionada con sus derivadas, en este caso su derivada segunda. Determinar todas las soluciones de la ecuación $(*)$ quiere decir determinar su conjunto de soluciones:

$$H = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}) \mid D^2 f + f = 0\}.$$

Desde un punto de vista algebráico, H tiene una estructura de espacio vectoria real. Esto se debe básicamente a que la derivada, y por lo tanto la derivada segunda, preserva sumas de funciones y productos por constantes. En realidad el conjunto $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ es un espacio vectorial porque la suma de dos funciones con infinitas derivadas es una función del mismo tipo y lo mismo ocurre con el producto por escalares reales. El conjunto H es en realidad un subespacio de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$. Para probar esto tenemos que verificar dos propiedades:

i) $0 \in H$
ii) $f, g \in H,\ \lambda \in \mathbf{R} \Rightarrow f + \lambda g \in H$.

La primera propiedad es trivial porque la derivada de la función nula es la función nula. La segunda se deduce de la linealidad de la derivada segunda:

$$\begin{aligned} D^2(f + \lambda g) + (f + \lambda g) &= D^2 f + \lambda D^2 g + f + \lambda g \\ &= (D^2 f + f) + \lambda(D^2 g + g) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esta cuenta muestra que si f y g son soluciones de la ecución $(*)$, entonces la función $f + \lambda g$ también lo es.

Mientras el espacio vectorial $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ es decomunalmente grande (su dimensión es infinita), el subespacio de soluciones H tiene dimensión finita igual a 2. En la próxima sección vamos a ver esto y también vamos a ver que H tiene una base "canónica" formada por las funciones seno y coseno. Claro que como estamos tratando de definir estas funciones, no podemos hacer uso de ellas hasta tanto no las hayamos definido correctamente. Si quiere conocer el desenlace de este extraño asunto, busque un lugar tranquilo y siga leyendo atentamente.

3. Cálculo de soluciones

Hasta ahora la única solución que hemos dado de nuestra ecuación diferencial es la función nula. El procedimiento que vamos a seguir para encontrar alguna solución no trivial consiste en proponer como solución una función que puede desarrollarse en serie de potencias

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

donde los a_k son, en principio, desconocidos. Ahora vamos a inyectar esta serie en la ecuación diferencial forzando su cumplimiento

$$D^2(\sum_{i=0}^{\infty} a_k x^k) + (\sum_{i=0}^{\infty} a_k x^k) = 0.$$

Hay un teorema que afirma que una serie de potencias absolutamente convergente puede derivarse término a término. Como todavía no conocemos a los a_k no podemos asegurar que nuestra serie converja. Sin embargo, vamos a ver qué sucedería si la serie fuese absolutamente convergente. Derivando formalmente término a término, obtenemos

$$\begin{aligned}
D^2(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k) &= D(D(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k)) \\
&= D(\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}) \\
&= D(\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}) \\
&= D(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} k x^{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) k a_{k+1} x^{k-1}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k
\end{aligned}$$

donde, por dos veces, hemos reemplazado la serie desde $k = 0$ por la serie desde $k = 1$ y luego hemos reemplazado k por $k + 1$. Todo esto tiene por objeto calcuar el coeficiente de x^k en $D^2 f$. El resultado es que en $D^2 f$ el coeficiente de x^k es

$$(k+2)(k+1)a_{k+2}$$

y como el coeficiente correspondiente en f es a_k, la igualdad $D^2 f + f = 0$ se traduce en

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} + a_k = 0 \qquad (\forall\, k \geq 0).$$

De aquí obtenemos una relación de recurrencia que permite expresar a_{k+2} en términos de a_k

$$a_{k+2} = -\frac{1}{(k+2)(k+1)} a_k. \qquad (\forall\, k \geq 0) \tag{1}$$

El plan sería el siguiente: (a) Resolver la recurrencia (1) y calcular los a_k; (b) probar que los a_k encontrados forman una serie absolutamente convergente. Si llamamos f a la función dada por esa serie, sabremos por construcción que f es solución de la ecuación diferencial. De este modo habremos encontrado una solución no trivial.

Para resolver la recurrencia tengamos en cuenta que como no tenemos restricciones sobre a_0 y a_1, todo dependerá de los valores que asignemos a estos dos coeficientes. Por supuesto, si elegimos $a_0 = a_1 = 0$, de la recurrencia vamos a obtener $a_k = 0$ para todo k (la función nula). En general, una vez fijados a_0 y a_1, el resto de los a_k queda unívocamente determinado por (1). Por ejemplo, tomemos $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$. Haciendo esto, de la recurrencia resulta:

$$a_{2i} = 0 \qquad (\forall\, i \geq 0). \tag{2}$$

es decir, los a_k de índice par son todos nulos. Esto es así porque $a_0 = 0$ y si $a_{2i} = 0$, poniendo $k = 2i$ en (1) resulta $a_{2i+2} = 0$; la afirmación se sigue por inducción en i. Con respecto a los índices impares, después de pensarlo un poco uno se da cuenta de que

$$a_{2i+1} = \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} \qquad (\forall\, i \geq 0). \tag{3}$$

Esta ecuación también se puede probar por inducción en i. Para $i = 0$ se verifica porque habíamos elegido $a_1 = 1$. Además, si se verifica para cierto índice i, la recurrencia implica

$$\begin{aligned} a_{2i+3} &= -\frac{1}{(2i+3)(2i+2)} a_{2i+1} \\ &= -\frac{1}{(2i+3)(2i+2)} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} \\ &= \frac{(-1)^{i+1}}{(2i+3)!} \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

Las ecuaciones (2) y (3) constituyen la solución de la recurrencia (1) para las condiciones iniciales $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Ahora podemos ver que la serie resultante es absolutamente convergente con radio de convergencia infinito. Una forma de verlo es comparándola con la serie “completa” de coeficiente $1/k!$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!}.$$

Esta serie de comparación tiene radio de convergencia infinito porque sus coeficientes son todos mayores que cero y los cocientes sucesivos tienden a cero para cualquier valor de $|x|$

$$\frac{\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{|x|^k}{k!}} = \frac{|x|}{k!}.$$

Como habíamos adelantado, la serie de potencias que encontramos define, por construcción, una función en $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ que satisface la ecuación diferencial que nos habíamos planteado. Esta es precisamente la función seno. Más formalmente, tenemos la siguiente

Definición. Llamamos función *seno* a la función dada por la serie de potencias

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

La serie de potencias de la función seno converge absolutamente y tiene radio de convergencia infinito. En particular sus derivadas son también series de potencias del mismo tipo y se pueden obtener derivando la serie del seno formalmente término a término. La función seno satisface la ecuación diferencial $(*)$ y, además, cumple

$$\operatorname{sen}(0) = 0 \quad \text{y} \quad D\operatorname{sen}(0) = 1$$

porque haciendo $x = 0$ en la expansión en serie del seno queda a_0 (que era igual a 0) y si primero derivamos y después igualamos a 0 queda a_1 (que era igual a 1).

Ejercicio 1. Repita el mismo razonamiento para las condiciones iniciales $a_0 = 1$ y $a_1 = 0$ y obtenga los coeficientes de otra serie absolutamente convergente con radio de convergencia infinito. Esta nueva solución de la ecuación diferencial es la función *coseno*. En particular resulta

$$\cos(0) = 1 \quad \text{y} \quad D\cos(0) = 0.$$

4. Caracterización de todas las soluciones

Ahora que tenemos dos elementos del espacio de soluciones H, a saber: seno y coseno, vamos a ver que la dimensión de H es igual a 2 y que estas dos funciones son una base. Tomemos una función $f \in H$, tenemos que mostrar que f es combinación lineal de seno y coseno:

$$f(x) = \lambda \operatorname{sen}(x) + \mu \cos(x) \qquad (\forall\, x \in \mathbf{R}).$$

Antes de probar la existencia de las constantes λ y μ tratemos de ver cuáles serían buenos candidatos. Como la igualdad debe valer para todo x, en particular debería ser cierta para $x = 0$. Evaluando en 0 nos queda:

$$f(0) = \lambda \operatorname{sen}(0) + \mu \cos(0) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 = \mu$$

de donde, de existir un tal μ debería ser igual a $f(0)$. Para calcular un candidato a λ, primero derivamos y después evaluamos en 0:

$$Df(0) = \lambda D\mathrm{sen}(0) + \mu D\mathrm{cos}(0) = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0 = \lambda$$

y el candidato para λ es $Df(0)$. Ahora la cuestión es demostrar la igualdad

$$f(x) = Df(0) \operatorname{sen}(x) + f(0) \cos(x) \qquad (\forall\, x \in \mathbf{R}).$$

Por la elección de los coeficientes λ y μ lo que sí sabemos es que los lados izquierdo y derecho de la ecuación de arriba son dos funciones que tienen las siguientes características:

i) Las dos pertenecen a H: f por hipótesis y el lado derecho por ser una combinación lineal de elementos de H

ii) Las dos funciones tienen el mismo valor en $x = 0$ por la elección del coeficiente de $\cos(x)$

iii) Las dos funciones tienen la misma derivada en $x = 0$ por la elección del coeficiente de $\operatorname{sen}(x)$.

Por lo tanto, tendríamos que probar que si dos funciones f y g pertenecientes a H verifican $f(0) = g(0)$ y $Df(0) = Dg(0)$, entonces $f(x) = g(x)$ para todo x. Si consideramos la resta obtenemos una nueva función $h = f - g$ que pertenece a H y verifica $h(0) = 0$ y $Dh(0) = 0$. Tendríamos que demostrar que, en estas circunstancias, $h(x) = 0$ para todo x. Consideremos la función

$$T(x) = h(x)^2 + (Dh(x))^2$$

La función T se anula en 0 porque tanto h como Dh valen cero en 0. Pero si derivamos T obtenemos:

$$\begin{aligned} DT(x) &= 2h(x)Dh(x) + 2(Dh(x))(D^2h(x)) \\ &= 2h(x)Dh(x) - 2(Dh(x))h(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

porque $h \in H$ y en consecuencia $D^2h(x) = -h(x)$. Luego la función T debe ser constante (su derivada es nula) y como $T(0) = 0$, esa constante debe ser 0. Así, $T(x) = 0$ y

$$h(x)^2 + (Dh(x))^2 = 0$$

para todo valor de x. Pero como la suma de dos números reales al cuadrado sólo puede ser cero cuando ambos números son cero, obtenemos $h(x) = 0$ y $Dh(x) = 0$ para todo valor de x. En particular $h = 0$ y la propiedad queda demostrada.

El razonamiento muestra que las funciones seno y coseno generan H. Pero como son linealmente independientes sobre $\mathbf{R}$ (vea el ejercicio siguiente), resultan ser una base de H. En particular, obtenemos el siguiente

Teorema. *El conjunto H de funciones $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ que satisfacen la ecuación diferencial*

$$D^2 f + f = 0$$

es un espacio vectorial real de dimensión 2. Una base de H está dada por las funciones seno y coseno. Además, si $f \in H$, la manera de expresar f como combinación lineal de esta base viene dada por:

$$f = Df(0)\operatorname{sen}(x) + f(0)\cos(x).$$

Ejercicio 2. Muestre que el seno y el coseno son linealmente independientes sobre $\mathbf{R}$.

Ejercicio 3. Demuestre

$$D\mathrm{sen} = \cos \quad \text{y} \quad D\cos = -\operatorname{sen}$$

de dos formas distintas: (1) derivando las series término a término; (2) observando que las derivadas de elementos de H son funciones que pertenecen a H y usando el teorema anterior.

Ejercicio 4. Demuestre

$$\operatorname{sen}(x+\alpha) = \operatorname{sen}(x)\cos(\alpha) + \cos(x)\operatorname{sen}(\alpha)$$

y deduzca la identidad

$$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x).$$

(Ayuda: Muestre que $f(x) = \operatorname{sen}(x+\alpha)$ es un elemento de H y use el teorema anterior.)

Ejercicio 5. Demuestre

$$\cos(x+\alpha) = \cos(x)\cos(\alpha) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(\alpha)$$

y deduzca la identidad

$$\cos(2x) = \cos(x)^2 - \operatorname{sen}(x)^2.$$

Ejercicio 6. Demuestre

$$\operatorname{sen}(x)^2 + \cos(x)^2 = 1.$$

(Ayuda: pruebe que la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)^2 + \cos(x)^2$ es constante.)

Ejercicio 7. Demuestre que el seno es una función impar, o sea, $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$ y que el coseno es una función par, es decir, $\cos(-x) = \cos(x)$. Haga dos demostraciones de estas propiedades, una a partir de las series de potencias, otra usando el teorema.

5. Definición del número π

Así como la interpretación geométria del seno viene dada por el cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa, la interpretación geométrica del número π lo caracteriza como el cociente entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro. Una vez más estamos frente a una descripción importante aunque insuficiente como definición. Una buena definición de π debería permitir demostrar, por ejemplo, que $\text{sen}(\pi/2) = 1$ o que $\cos(\pi/2) = 0$.

Una forma de definir π es diciendo que $\pi/2$ es el menor número real positivo en donde el coseno vale cero. Es decir

$$\pi = 2 \min\{u \geq 0 \mid \cos(u) = 0\}.$$

Para poder dar esa definición primero tendríamos que demostrar que el mínimo existe. Pero la demostración de la existencia se reduce a probar que

$$\{u \geq 0 \mid \cos(u) = 0\} \neq \emptyset$$

porque una vez que sepamos esto, la continuidad del coseno implicará que el ínfimo del conjunto pertenece al conjunto (no olvidemos que la función coseno tiene infinitas derivadas).

Luego, la cuestión es ver que $\cos(u) = 0$ para algún $u \geq 0$. Vamos a suponer por el absurdo que $\cos(u) \neq 0$ para todo $u \geq 0$. De la definición del coseno sabemos que $\cos(0) = 1$ así que por continuidad nuestra suposición implica $\cos(u) > 0$ para $u \geq 0$. Como la derivada del seno es el coseno (Ejercicio 3), deducimos que, al tener derivada positiva, el seno sería una función creciente para $u \geq 0$. Dado que la derivada del coseno es menos el seno (mismo ejercicio), el coseno resultaría decreciente para $u \geq 0$. Por último, como $D^2 \cos(u) = -\cos(u) < 0$, la derivada del coseno sería decreciente para $u \geq 0$.

Toda esta información geométrica debería servirnos para formarnos una idea aproximada del gráfico de $\cos(u)$ para $u \geq 0$. Se trataría de una curva que comienza valiendo 1 en $u = 0$ y decrece de forma tal que mantiene una concavidad negativa (hacia abajo). Por supuesto, ya todos conocemos el gráfico de las funciones trigonométricas con enorme precisión, pero lo conocemos porque nos lo han contado. Lo que estamos viendo ahora es el por qué de esas representaciones geométricas; en otras palabras, estamos demostrando que los gráficos del seno y coseno que nos enseñaron, son realmente así, como nos los enseñaron (al fin pegaron una!).

Con las conclusiones anteriores tendríamos que poder llegar a un absurdo. La idea es la siguiente: tomemeos un $u_0 > 0$ cualquiera y comparemos el gráfico de la función coseno con el de la recta tangente a u_0. Vamos a ver que la recta se mantiene por encima de la curva $y = \cos(x)$ y como tiene pendiente negativa, cruza al eje x para algún $u > u_0$. Luego, el coseno, por ser menor que la recta, también tendrá que cruzar al eje x. La recta tangente al gráfico del coseno en el punto $(u_0, \cos(u_0))$ tiene ecuación

$$y = D\cos(u_0)(x - u_0) + \cos(u_0).$$

Para compararla con la curva $y = \cos(x)$ consideremos la resta

$$f(x) = D\cos(u_0)(x - u_0) + \cos(u_0) - \cos(x)$$

Si evaluamos en $x = u_0$ nos queda

$$f(u_0) = 0$$

y si derivamos obtenemos

$$Df(x) = D\cos(u_0) - D\cos(x).$$

Como la derivada del coseno era decreciente, resulta $Df(x) > 0$ para $x > u_0$. Esto significa que f es una función creciente para $x > u_0$ y por lo tanto $f(x) > f(u_0) = 0$ si $x > u_0$. Ahora, calculemos el valor de x para el cual la recta se anula

$$D\cos(u_0)(x - u_0) + \cos(u_0) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = -\frac{\cos(u_0)}{D\cos(u_0)} + u_0.$$

El valor obtenido de x está a la derecha de u_0 porque $\cos(u_0) > 0$ y $D\cos(u_0) < 0$. Finalmente, evaluando en ese x (que vamos a llamar x_0) nos queda

$$f(x_0) = -\cos(x_0)$$

que es una contradicción porque habíamos supuesto que el coseno era positivo y sabíamos que f también era una función positiva a la derecha de u_0. Esta contradicción provino de suponer que el coseno era siempre positivo en $\mathbf{R}_{\geq 0}$. Luego, el coseno se anula a la derecha del 0 y podemos definir π como habíamos dicho arriba, es decir,

$$\pi = 2\min\{u \geq 0 \mid \cos(u) = 0\}.$$

6. Periodicidad de las funciones trigonométricas

Por la definición de π sabemos que $\cos(\pi/2) = 0$ y además que $\pi/2$ es el menor valor positivo en donde $\cos(x) = 0$. Por lo tanto el coseno es positivo en el intervalo $[0, \pi/2)$; vale 1 en 0 y 0 en $\pi/2$. Entonces en este mismo intervalo el seno es creciente porque su derivada es el coseno (Ejercicio 3). Luego el seno resulta positivo en $(0, \pi/2]$ y de la identidad $\operatorname{sen}(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$ (Ejercicio 6) vemos que $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$.

Usando las fórmulas de $\operatorname{sen}(2x)$ y $\cos(2x)$ (Ejercicios 4y 5) para $x = \pi/2$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\pi) &= \operatorname{sen}(2\frac{\pi}{2}) = 2\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{2}) = 0\\ \cos(\pi) &= \cos(2\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2})^2 - \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})^2 = -1.\end{aligned}$$

Volviéndolas a usar para $x = \pi$ nos queda:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(2\pi) &= 2\operatorname{sen}(\pi)\cos(\pi) = 0\\ \cos(2\pi) &= \cos(\pi)^2 - \operatorname{sen}(\pi)^2 = 1.\end{aligned}$$

Ahora podemos demostrar por inducción en k que

$$\operatorname{sen}(x + 2k\pi) = \operatorname{sen}(x) \qquad \text{y} \qquad \cos(x + 2k\pi) = \cos(x). \tag{$*$}$$

Ciertamente las fórmulas son válidas cuando $k = 0$. Por otra parte, si las igualdades valen para un cierto k, podemos probarlas para $k + 1$ usando las fórmulas del seno y coseno de la suma:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x + 2(k+1)\pi) &= \operatorname{sen}((x + 2k\pi) + 2\pi)\\ &= \operatorname{sen}(x + 2k\pi)\cos(2\pi) + \cos(x + 2k\pi)\operatorname{sen}(2\pi)\\ &= \operatorname{sen}(x)\cos(2\pi) + \cos(x)\operatorname{sen}(2\pi)\\ &= \operatorname{sen}(x)\cdot 1 + \cos(x)\cdot 0\\ &= \operatorname{sen}(x)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\cos(x + 2(k+1)\pi) &= \cos((x + 2k\pi) + 2\pi)\\ &= \cos(x + 2k\pi)\cos(2\pi) - \operatorname{sen}(x + 2k\pi)\operatorname{sen}(2\pi)\\ &= \cos(x)\cos(2\pi) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(2\pi)\\ &= \cos(x)\cdot 1 - \operatorname{sen}(x)\cdot 0\\ &= \cos(x).\end{aligned}$$

Las ecuaciones $(*)$ revelan la *periodicidad* de las funciones trigonométricas. Esta periodicidad permite describir el comportamiento del seno y el coseno en cualquier intervalo de longitud 2π a partir de un único intervalo de esa misma longitud. Por ejemplo, si logramos formarnos una idea del comportamiente de estas funciones en el intervalo $[0, 2\pi)$, entonces la periodicidad nos va a permitir aplicar las mismas nociones a cualquier intervalo $[2k\pi, 2(k+1)\pi)$ independientemente del valor de $k \in \mathbf{Z}$.

7. Los ceros de las funciones trigonométricas

Ahora que sabemos que las funciones trigonométricas son periódicas de período 2π vamos a estudiar con mayor detalle su comportamiento en el intervalo $[0, 2\pi)$. Para eso vamos a dividir el intervalo en cuatro partes iguales, cada una de ellas de longitud $\pi/2$. En nuestros razonamientos vamos a utilizar dos identidades

$$\operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x) \tag{1}$$
$$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{sen}(x) \tag{2}$$

cuyas demostraciones se deducen inmediatamente de las fórmulas del seno y coseno de la suma (Ejercicios 4y 5).

Intervalo $[0, \pi/2)$. Ya lo estudiamos en la sección anterior, y el resultado que obtuvimos fue:

- $\operatorname{sen}(0) = 0$, $\cos(0) = 1$, $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$.
- $\operatorname{sen}(x) > 0$ y $\cos(x) > 0$ en el interior del intervalo.

Intervalo $[\pi/2, \pi)$. Lo podemos estudiar a partir de las ecuaciones (1) y (2) de arriba y reducir la cuestión al intervalo anterior. El resultado sería

- $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$, $\operatorname{sen}(\pi) = 0$, $\cos(\pi) = -1$.
- $\operatorname{sen}(x) > 0$ y $\cos(x) < 0$ en el interior del intervalo.

Intervalo $[\pi, 3\pi/2)$. Lo podemos estudiar a partir de las ecuaciones (1) y (2) y reducir la cuestión al intervalo anterior. El resultado es

- $\operatorname{sen}(\pi) = 0$, $\cos(\pi) = -1$, $\operatorname{sen}(3\pi/2) = -1$, $\cos(3\pi/2) = 0$.
- $\operatorname{sen}(x) < 0$ y $\cos(x) < 0$ en el interior del intervalo.

Intervalo $[3\pi/2, 2\pi)$. Lo podemos estudiar a partir de las ecuaciones (1) y (2) y reducir la cuestión al intervalo anterior. El resultado que obtenemos es

- $\operatorname{sen}(3\pi/2) = -1$, $\cos(3\pi/2) = 0$, $\operatorname{sen}(2\pi) = 0$, $\cos(2\pi) = 1$.
- $\operatorname{sen}(x) < 0$ y $\cos(x) > 0$ en el interior del intervalo.

Ejercicio 8. Complete las descripciones anteriores examinando máximos y mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones seno y coseno.

Con toda esta información estamos en condiciones de demostrar el siguiente

Teorema. *Valen las mismas afirmaciones*

i) *Los ceros de la función seno son exactamente los múltiplos enteros de π.*
ii) *Los ceros del coseno son los múltiplos impares de $\pi/2$.*
iii) *Dos números reales tienen el mismo seno y el mismo coseno, si, y sólo si, difieren en un múltiplo entero de 2π.*
iv) *Dados dos números reales a y b con $a^2 + b^2 = 1$, existe un único real α tal que*

$$\operatorname{sen}(\alpha) = a \qquad y \qquad \cos(\alpha) = b$$

y además, $0 \leq \alpha < 2\pi$.

Demostración: Debido a la periodicidad de las funciones trigonométricas, para probar (i) y (ii) es suficiente demostrar que en el intervalo $[0, 2\pi)$ el seno se anula únicamente en 0 y π y el coseno en $\pi/2$ y $3\pi/2$. Pero esto ya lo habíamos visto en la primera parte de esta sección cuando analizamos todo el intervalo $[0, 2\pi)$.

Si dos números reales α y β tienen el mismo seno y el mismo coseno, entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha - \beta) &= \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)\\ &= \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) - \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha)\\ &= 0\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)\\ &= \cos(\alpha)\cos(\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha)\\ &= 1.\end{aligned}$$

La primera igualdad, gracias a la propiedad (i) ya demostrada, implica

$$\alpha - \beta = k\pi$$

para algún $k \in \mathbf{Z}$. Resta probar que k es par. Reemplazando esto en la segunda igualdad, obtenemos

$$\cos(k\pi) = 1$$

Como $\cos(k\pi) = 0$ para todo k impar, esto elimina a los impares. Por otro lado, los valores pares de k verifican $\cos(k\pi) = 1$. En consecuencia, $\alpha - \beta = k\pi$ para k par. La recíproca se verfica inmediatamente.

Falta demostrar (iv). El seno es una función continua que en $\pi/2$ vale 1 y en $3\pi/2$ vale -1; por lo tanto debe tomar todos los valores intermedios en el intervalo $[0, 2\pi)$. Si $a^2 + b^2 = 1$, entonces los valores absolutos de a y b son menores o iguales que 1. Así, existe algún $\alpha \in [0, 2\pi)$ tal que $a = \operatorname{sen}(\alpha)$. Luego

$$b^2 = 1 - a^{=}1 - \operatorname{sen}(\alpha)^2 = \cos(\alpha)^2$$

y por lo tanto $b = \pm\cos(\alpha)$. Si $b = \cos(\alpha)$ la existencia queda demostrada. Si $b = -\cos(\alpha)$, tomamos $\alpha' = \pi - \alpha$. Este número α' también está en el intervalo $[0, 2\pi)$; además

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha') &= \operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}(\alpha) = a\\ \cos(\alpha') &= \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha) = b.\end{aligned}$$

Y la existencia también queda probada en este caso. La unicidad del punto (iv) es consecuencia inmediata del punto (iii) ∎