Nociones métricas y topológicas en $\mathbf{R}^n$

por Leandro Caniglia

1. De una a varias variables

El cálculo en una variable encierra una cantidad de nociones que pueden generalizarse al caso de varias variables. Esto permite que ciertos fenómenos físicos, para citar un ejemplo relevante, puedan estudiarse de una forma menos esquemática, más cercana a la realidad. La introducción de varias variables al análisis matemático puede responder a diferentes necesidades. Consideremos una partícula en movimiento. En cada instante t la partícula ocupa una posición $P(t)$. Ahora bien, si los movimientos de la partícula están restringidos a una línea recta, la función P tomará valores reales: fijado un origen en la recta, en el instante t la partícula estará en la posición $P(t)$ con respecto a ese origen. Pero si levantamos esa restricción, que resulta artificial en la mayoría de las aplicaciones, y dejamos que la partícula se mueva en un plano o en el espacio, entonces la función P deberá tomar valores en $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{R}^3$. Fijado un sistema de coordenadas, en el instante t la posición de la partícula será $P(t) = (x(t), y(t))$ o $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$; es decir, un punto que queda determinado por dos o tres coordenadas. Así, en el primer caso P será una funcion de $\mathbf{R}_{\geq 0} \to \mathbf{R}$ mientras que en el segundo, será una función de $\mathbf{R}_{\geq 0} \to \mathbf{R}^2$ o $\mathbf{R}^3$. En casos como éste, las "n variables" aparecen del lado del codominio de la función. En el dominio seguimos teniendo una sola variable. Eso hace que la generalización de una a varias variables sea prácticamente automática. Las nociones de límite, continuidad, y derivabilidad de la función P se deducirán fácilmente de su aplicación a cada una de las funciones coordenadas $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$, las cuales sí son funciones de una variable. Por ejemplo, la *velocidad* de la partícula en el instante t_0 será simplemente el vector de coordenadas $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$. Del mismo modo la *aceleración* en ese instante estará dada por $(x''(t_0), y''(t_0), z''(t_0))$. Un problema de dimensión 3 se reduce a tres problemas de dimensión 1.

Sin embargo, no en todos los casos las cosas son así de simples. Consideremos otro fenómeno físico: el de una chapa sometida a diferentes fuentes de calor. El problema de determinar la temperatura que la chapa alcanza en cada uno de sus puntos obliga a estudiar una función $T(x, y, t)$ cuyo valor es la temperatura que alcanza el punto de la chapa cuyas coordenadas son (x, y) en el instante t. Aquí las variables están del lado del dominio de la función, no de su codominio. Más precisamente la función T es una aplicación de $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_{\geq 0} \to \mathbf{R}$. Esta situación es menos elemental que la anterior desde el punto de vista de la aplicación del análisis matemático en una variable.

Incluso las cosas pueden ser aún más complicadas. Pensemos un tercer ejemplo físico, el de un campo magnético o gravitatorio. Una partícula sumergida en ese campo experimentará una fuerza que la impulsará hacia algún otro punto. Concretamente si la partícula tiene coordenadas (x, y, z) respecto de algún sistema cartesiano previamente convenido, la fuerza con la que el campo actuará sobre esa partícula será un vector $F(x, y, z) = (F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z))$ de tres coordenadas. Es un caso en donde las n variables aparecen tanto en el dominio como en el codominio de la función. Es decir, estamos frente a una aplicación de $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$.

Vemos entonces que el paso de una a varias variables es algo que no se puede evitar. Por lo tanto vamos a asomarnos al estudio de funciones de varias variables con toda generalidad. El lector podrá comprobar en cada definición y en cada teorema que la dificultad no está en la cantidad de variables sino en el hecho mismo de tratar con funciones de más de una variable. Es decir, el paso de una a varias variables no se simplifica por el mero hecho de restringirnos al tratamiento de 2 o 3 variables en lugar de n. Por ese motivo, no vamos a detenernos especialmente en el caso de 2 y 3 variables sino que vamos a encarar directamente el estudio de n variables en general. Con respecto al mayor grado de abstracción que supone el tener que pensar en un espacio de dimensión n, digamos que en los fenómenos físicos no sólo aparecen dos o tres variables. En el ejemplo del campo magnético, si el campo cambia con el tiempo tendremos una cuarta variable t. Por otro lado, el número de variables no tiene que ver exclusivamente con el número de dimensiones físicas sino con la cantidad de factores que intervienen en la medición de una magnitud. Cuando los economistas hablan de "variables económicas" están haciendo referencia justamente a ese hecho.

2. Coordenadas en $\mathbf{R}^n$

Aunque vamos a suponer que el lector tiene cierta familiaridad con la noción de par ordenado, terna y, en general, $n$upla, trataremos de sentar aquí claramente las bases sobre las que vamos a apoyarnos en las siguientes secciones.

Dado un número natural n una *$n$upla* es una sucesión finita $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en la cual los x_i son números reales. Cuando trabajemos con $n$uplas vamos a resaltar ese hecho escribiendo, por ejemplo,

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

(note la flecha sobre la variable) y diciendo que $\vec{x}$ es un *vector*. El papel de los números reales lo vamos a subrayar llamándolos, cuando sea oportuno, *esclares*. Al conjunto de todas las posibles $n$uplas lo vamos a denotar $\mathbf{R}^n$. Así $\mathbf{R}^1$ se identificará con $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^2$ designará al conjunto de todos los pares ordenados, $\mathbf{R}^3$ al de ternas, etc. Dada una $n$upla $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, al número x_i lo llamaremos *la iésima coordenada de $\vec{x}$*. Al número n lo llamaremos *dimensión* de la $n$upla.

Dos $n$uplas (de la misma dimensión) $\vec{x}$ y $\vec{y}$ se pueden sumar coordenada a coordenada. También una $n$upla puede muliplicarse por un escalar. Más precisamente, definimos la *suma* y el *producto por escalares* en $\mathbf{R}^n$ como

$$\begin{aligned} \vec{x} + \vec{y} &:= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ \lambda \cdot \vec{x} &:= (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n). \end{aligned}$$

Ejercicio 1. Pruebe que la suma de $n$uplas es asociativa, conmutativa, tiene elemento neutro (¿cuál?) y que cada elemento posee un inverso (aditivo). Pruebe también que 1 actúa trivialmente sobre cualquier verctor: $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$, que el producto por escalares es asociativo en el sentido de que $(\lambda\mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x})$, que distribuye respecto a la suma de $n$uplas y que verifica $(\lambda + \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{x}$.

A la función de $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ que a cada $\vec{x}$ le asigna su $i$ésima coordenada x_i la llamaremos *iésima proyección* y la denotaremos π_i. Cuando consideremos una función $\vec{f}$ con codominio en $\mathbf{R}^n$, denotaremos f_i a la $i$ésima coordenada de $\vec{f}$. Es fácil ver que $f_i = \pi_i \circ \vec{f}$ (demuestre).

Ejercicio 2. Demuestre que las proyecciones son funciones lineales; es decir,

$$\pi_i(\vec{x}+\vec{y}) = \pi_i(\vec{x}) + \pi_i(\vec{y})$$
$$\pi_i(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \pi_i(\vec{x})$$

3. Norma, producto interno y distancia

Del mismo modo que en $\mathbf{R}$ usamos el valor absoluto para medir distancias y construir las nociones métricas que necesitábamos, en $\mathbf{R}^n$ vamos a utilizar la "norma" de un vector para hacer el mismo tipo de cosas. La norma de un vector representa el tamño del mismo, su longitud. Los epsilon y deltas seguirán jugando el mismo papel que en el caso de una sola variable, sólo que ahora la manera de medir las distancias será la que corresponde a este caso.

Dado una $n$upla $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ llamamos *norma de* $\vec{x}$ a la cantidad

$$\|\vec{x}\| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Una operación nueva que tiene sentido considerar en los vectores se llama "producto interno". Concretamente, dados dos vectores $\vec{x}$ y $\vec{y}$ de la misma dimensión n su *producto interno* es

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Ejercicio 1. Demuestre

i) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$.
ii) $\langle \vec{x}, \vec{y} + \lambda \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \lambda \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle$.
iii) $\|\vec{x}\|^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$.

El producto interno sirve para comprobar si dos vectores son perpendiculares. Para ver esto intuitivamente consideremos dos vectores $\vec{a} = (a_1, a_2)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2)$ en $\mathbf{R}^2$. Consideremos el paralelogramo cuyos vértices son $\vec{0}$, $\vec{a}$, $\vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{b}$. Ambos vectores son perpendiculares si las diagonales de ese paralelogramo son iguales (aunque esto es claro intuitivamente, el lector debe notar que no hemos definido matemáticamente qué signifca ser "perpendicular"). Ahora, una de las diagonales mide $\|\vec{a}+\vec{b}\|$ y la otra mide $\|\vec{b}-\vec{a}\|$. Por lo tanto, los vectores son perpendiculares cuando:

$$(a_1+b_1)^2 + (a_2+b_2)^2 = (a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2$$

lo que ocurre exactamente cuando (demuestre)

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$$

es decir, cuando

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0.$$

Así, partiendo de esta idea geométrica, decimos que dos vectores cualesquiera $\vec{x}$ y $\vec{y}$ son *perpendiculares* (u *ortogonales*) si su producto interno $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ es nulo.

Tratemos de llegar un poco más lejos con la idea geométrica. Supongamos por un instante que $\vec{b}$ tiene norma 1. Si consideramos la "sombra" que $\vec{a}$ proyecta sobre $\vec{b}$, obtendremos un vector que es múltiplo de $\vec{b}$; digamos $\vec{c} := s\vec{b}$. Para determinar exactamente al vector $\vec{c}$ debemos calcular el valor de s. Ahora bien, el hecho de que $\vec{c}$ sea la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ se traduce geométricamente a que $\vec{a} - \vec{c}$ sea perpendicular a $\vec{b}$; es decir,

$$\langle \vec{a} - s\vec{b}, \vec{b} \rangle = 0$$

de donde

$$s = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle.$$

Esto muestra otra propiedad geométrica del producto interno, a saber: *el producto interno de un vector $\vec{a}$ por otro $\vec{b}$ de norma* 1 *es igual a la norma de la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$.*

Algunas propiedades de la norma están enunciadas y demostradas en la siguiente

3.1 Proposición. Se verifican

i) $\|\vec{x}\| \geq 0$ y $\|\vec{x}\| = 0$ si, y sólo si, $\vec{x} = \vec{0}$.
ii) $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\|\vec{x}\|$.
iii) $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$.
iv) (*Desigualdad triangular*) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

Demostración: Las únicas propiedades no evidentes son la tercera y la cuarta. Como por otro lado ambas propiedades son evidentes cuando alguno de los dos vectores es nulo, podemos suponer que ninguno de ellos lo es. Dividiendo por $\|\vec{x}\|$ y por $\|\vec{y}\|$ vemos que la tercera propiedad es suficiente probarla para el caso en que ambos vectores tienen norma 1. Aquí es interesante observar que según la interpretación geométrica que hicimos arriba del producto interno, la desigualdad debe ser verdadera puesto que la proyección de un vector no puede ser más "larga" que el vector mismo. Sin embargo este argumento no constituye una demostración matemática puesto que la interpretación geométrica la hicimos en dimensión 2 y de un modo meramente intuitivo. Lo bueno de demostrar formalmente algo que "vemos" geométricamente es que al hacer eso estamos verificando que nuestra intuición geométrica se corresponde exactamente con las definciones matemáticas que estamos utilizando.

Siguiendo con la demostración digamos ahora que reemplazando $\vec{x}$ por $-\vec{x}$ vemos también que es suficiente mostrar la desigualdad sin las barras de valor absoluto alrededor del producto interno. Es decir, la propiedad (iii) se reduce a probar que

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \leq 1$$

cuando $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| = 1$. Pero si calculamos

$$0 \leq \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y} \rangle$$

obtenemos

$$\|\vec{x}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2 = 2 - 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

como queríamos demostrar. La cuarta propiedad se sigue ahora de ésta por lo siguiente

$$\begin{aligned}\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 &= \langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}\rangle \\ &= \|\vec{x}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle + \|\vec{y}\|^2 \\ &\leq \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 \\ &= (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2 \ \blacksquare\end{aligned}$$

Ahora estamos en condiciones de decir que dados dos puntos $\vec{x}$ y $\vec{y}$ de $\mathbf{R}^n$, su *distancia* queda definida por

$$\mathrm{d}(\vec{x}, \vec{y}) := \|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

De las propiedades de la norma se deducen propiedades de la distancia, algunas de las cuales enunciamos en la siguiente

3.2 Proposición. Se verifican

i) $\mathrm{d}(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0$ y vale la igualdad, si y sólo si, $\vec{x} = \vec{y}$.
ii) $\mathrm{d}(\lambda\vec{x}, \lambda\vec{y}) = |\lambda|\, \mathrm{d}(\vec{x}, \vec{y})$.
iii) (*Desigualdad triangular*) $\mathrm{d}(\vec{x}, \vec{y}) \leq \mathrm{d}(\vec{x}, \vec{z}) + \mathrm{d}(\vec{z}, \vec{y})$.

4. Abiertos y cerrados

En esta sección vamos a extender a $\mathbf{R}^n$ las nociones métricas y topológicas que habíamos introducido para la recta real [*Nociones métricas y topológicas*]. La generalización de cada concepto sigue un camino natural fundado en la idea de proximidad que se hace patente con la noción de abierto.

En el caso de la recta real, habíamos dicho que un conjunto A era "abierto" si cada uno de sus puntos estaba contenido en algún "intervalo abierto" centrado en el punto y totalmente incluído en A. Para extender esta definición a $\mathbf{R}^n$ necesitamos reemplazar "intervalo abierto" por una noción equivalente en el caso $n$dimensional. Esa noción la proporciona la siguiente

Definición. Dado un punto $\vec{a} \in \mathbf{R}^n$ y un número real $r > 0$, llamamos *bola abierta con centro $\vec{a}$ y radio r* al conjunto

$$B(\vec{a}, r) := \{\vec{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathrm{d}(\vec{a}, \vec{x}) < r\}.$$

Análogamente, llamamos *bola cerrada con centro $\vec{a}$ y radio r* a

$$B[\vec{a}, r] := \{\vec{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathrm{d}(\vec{a}, \vec{x}) \leq r\}$$

y *esfera con centro $\vec{a}$ y radio r* a

$$S[\vec{a}, r] := \{\vec{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathrm{d}(\vec{a}, \vec{x}) = r\}.$$

Cuando $n = 1$, la bola abierta $B(a, r)$ es el intervalo abierto $(a - r, a + r)$ y la bola cerrada es el intervalo cerrado $[a - r, a + r]$. Por otra parte, la esfera se reduce al conjunto de dos puntos $\{a-r, a+r\}$. En el caso $n=2$, la esfera $S[\vec{a}, r]$ es la circunferencia con centro en $\vec{a}$ y radio r cuya ecuación es

$$(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 = r^2.$$

A partir de aquí vamos a repetir el camino andando en el caso de dimensión 1, extendiendo las nociones a dimensión n y probando las propiedades y teoremas correspondientes al caso general.

Definiciones. Un conjunto $A \subseteq \mathbf{R}^n$ es *abierto* si para cada $\vec{a} \in A$, existe una bola abierta $B(\vec{b}, r)$ totalmente contenida en A. Un conjunto C es *cerrado* si su complemento $\mathbf{R}^n \setminus C$ es abierto.

4.1 Proposición. Se verifican

1. Toda bola abierta es un conjunto abierto.
2. Los conjuntos vacío $\emptyset$ y $\mathbf{R}^n$ son abiertos y cerrados a la vez.
3. Un conjunto A es abierto sí, y sólo sí, dado $\vec{a} \in A$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(\vec{a}, \epsilon) \subseteq A$.
4. Toda unión $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ de conjuntos abiertos A_λ es un conjunto abierto.
5. Todo conjunto abierto es una unión de bolas abiertas.
6. Toda bola cerrada $B[\vec{a}, r]$ es un conjunto cerrado.
7. Toda intersección $\bigcap_{\lambda \in L} C_\lambda$ de conjuntos cerrados C_λ es un conjunto cerrado.
8. La inteserccción de un número finito de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
9. La unión de un número finito de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.
10. Todo conjunto finito es cerrado.

Demostración.

1) Es inmediato a partir de la definición.

2) El conjunto vacío es abierto porque al no contener ningún punto, no contiene puntos que no cumplan la definición de abierto (es decir, no hay puntos de $\emptyset$ que no estén contendidos en una bola abierta metida en $\emptyset$ por la sencilla razón de que no hay puntos en $\emptyset$). También $\mathbf{R}^n$ es abierto ya que toda bola abierta está totalmente incluída en $\mathbf{R}^n$. Como ambos conjuntos son abiertos y uno es el complemento del otro, se deduce que ambos son cerrados.

3) Si A es abierto, dado $\vec{a} \in A$ existe una bola abierta $B := B(\vec{b}, r)$ tal que $\vec{a} \in B \subseteq A$. Tomemos ahora $\epsilon := r - \mathrm{d}(\vec{a}, \vec{b})$, entonces ϵ es positivo porque $\vec{a} \in B$ y $B(\vec{a}, \epsilon) \subseteq B$ ya que si $\mathrm{d}(\vec{x}, \vec{a}) < \epsilon = r - \mathrm{d}(\vec{a}, \vec{b})$, entonces $\mathrm{d}(\vec{x}, \vec{b}) \leq \mathrm{d}(\vec{x}, \vec{a}) + \mathrm{d}(\vec{a}, \vec{b}) < r$ en virtud de la desigualdad triangular.

4) Supongamos que $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ donde los A_λ son conjuntos abiertos. Dado $\vec{a} \in A$, existe algún índice $\lambda \in L$ tal que $\vec{a} \in A_\lambda$. Luego debe existir una bola abierta B tal que $\vec{a} \in B \subseteq A_\lambda \subseteq A$.

5) Supongamos que A es un conjunto abierto. Por el punto (3) para cada $\vec{a} \in A$, existe una bola abierta $B_{\vec{a}} := B(\vec{a}, \epsilon_{\vec{a}})$ tal que $\vec{a} \in B_{\vec{a}} \subseteq A$. Luego

$$A \subseteq \bigcup_{\vec{a} \in A} B_{\vec{a}} \subseteq \bigcup_{\vec{a} \in A} A \subseteq A.$$

6) Tenemos que probar que $\mathbf{R}^n \setminus B[\vec{a}, r]$ es un conjunto abierto. Tomemos $\vec{b} \notin B[\vec{a}, r]$. Entonces $d := \mathrm{d}(\vec{b}, \vec{a}) > r$. Luego $B(\vec{b}, d-r)$ es una bola abierta que contiene a $\vec{b}$ y es fácil comprobar que está totalmente incluída en $\mathbf{R}^n \setminus B[\vec{a}, r]$.

7) Como $\mathbf{R} \setminus \bigcap_{\lambda \in L} C_\lambda = \bigcup_{\lambda \in L} \mathbf{R} \setminus C_\lambda$ es una unión de abiertos, por 4) la intersección es un conjunto cerrado.

8) Se deduce de 3) y del hecho de que la intersección de un número finito de bolas abiertas centradas en un punto $\vec{a}$ es una bola abierta centrada en $\vec{a}$.

9) Se deduce de 8) porque el complemento de una unión es la intersección de los complementos.

10) Hay que probar que dado $\vec{a} \in \mathbf{R}^n$ el conjunto $\mathbf{R}^n \setminus \{\vec{a}\}$ es abierto. Dado $\vec{b}$ en ese conjunto, $r := \mathrm{d}(\vec{b}, \vec{a})$ es un número positivo. Luego la bola $B(\vec{b}, r)$ no contiene a $\vec{a}$, es decir, está totalmente incluída en el complemento ∎

5. Continuidad

Una vez establecida la definición de conjunto abierto, estamos en condiciones de introducir el resto de las nociones topológicas. Del mismo modo que en el caso de una variable, ahora decimos que un conjunto V es un *entorno* de un punto $\vec{a}$ si existe un abierto A tal que $\vec{a} \in A \subseteq V$. La noción de continuidad para funciones de n variables se puede establecer en términos topológicos o métricos, como lo muestra la siguiente

Definición. Dada una función $\vec{f}\colon D \to \mathbf{R}^m$ con dominio en un subconjunto D de $\mathbf{R}^n$ y un punto $\vec{a} \in D$, decimos que $\vec{f}$ es *continua en* $\vec{a}$ si para cada entorno W de $\vec{f}(\vec{a})$ en $\mathbf{R}^m$, existe un entorno V de $\vec{a}$ en $\mathbf{R}^n$ tal que $\vec{f}(V \cap D) \subseteq W$.

En términos de epsilon y deltas la definición de continuidad en un punto $\vec{a}$ se puede enunciar del siguiente modo: Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\vec{x} \in D$ y $\mathrm{d}(\vec{x}, \vec{a}) < \delta$, entonces $\mathrm{d}(\vec{f}(\vec{x}), \vec{f}(\vec{a})) < \epsilon$.

La equivalencia entre ambas formulaciones es fácil de comprobar en virtud de las definiciones y de la prop. 4.1 (complete el lector los detalles). Como un primer ejemplo de función continua vamos a probar que la suma de números reales

$$\begin{aligned} +\colon \mathbf{R}^2 &\to \mathbf{R} \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

es continua en todos los puntos de $\mathbf{R}^2$. Fijemos entonces un punto $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ y probemos que la función es continua en ese punto. Dado $\epsilon > 0$ tenemos que encontrar $\delta > 0$ tal que $|x + y - (a + b)| < \epsilon$ si $\|(x, y) - (a, b)\| < \delta$. Ahora

$$(x-a)^2 \leq (x-a)^2 + (y-b)^2 = \|(x, y) - (a, b)\|^2$$

de donde

$$|x - a| \leq \|(x, y) - (a, b)\|.$$

Del mismo modo

$$|y - b| \leq \|(x, y) - (a, b)\|.$$

Luego, tomando $\delta := \epsilon/2$ tenemos

$$|x + y - (a + b)| \leq |x - a| + |y - b| \leq 2\|(x, y) - (a, b)\| < \epsilon$$

si $\|(x, y) - (a, b)\| < \delta$ ∎

Ejercicio 1. Demuestre que la suma de vectores $+\colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ es una función continua de $\mathbf{R}^{2n} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^n$.

Ejercicio 2. Demuestre que la suma de funciones (de varias variables) que son continuas en un punto $\vec{a}$ es una función continua en $\vec{a}$. Enuncie y demuestre un resultado similar para la composición.

La noción de continuidad es topológica, es decir, se puede definir en términos de conjuntos abiertos. La noción de "continuidad uniforme", en cambio, es métrica [*Nociones métricas y topológicas*, §1]. Otra distinción entre la continuidad y la continuidad uniforme es que mientras la primera es una noción *local*, la segunda es *global*. Veamos cómo se define la continuidad uniforme para funciones de varias variables

Definición. Una función $\vec{f}\colon D \to \mathbf{R}^m$ cuyo dominio es un conjunto $D \subseteq \mathbf{R}^n$ es *uniformemente continua* si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal si $\vec{x}, \vec{y} \in D$ verifican $\mathrm{d}(\vec{x}, \vec{y}) < \delta$, entonces $\mathrm{d}(\vec{f}(\vec{x}), \vec{f}(\vec{y})) < \epsilon$.

Ejercicio 3. Demuestre que la suma de vectores (ejercicio anterior) es una función uniformemente continua. ¿Lo es el producto por escalares $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$?

Cuando una función es continua en cada punto de su dominio decimos simplemente que es *continua*. Una propiedad de las funciones continuas que vamos a utilizar varias veces es la siguiente

5.1 Proposición. Si $\vec{f}\colon D \to \mathbf{R}^m$ es una función continua con dominio en un conjunto $D \subseteq \mathbf{R}^n$, entonces la imagen inversa $\vec{f}^{-1}(B)$ de cada abierto $B \subseteq \mathbf{R}^m$ es de la forma $A \cap D$ para algún abierto A de $\mathbf{R}^n$.

Demostración. Tomemos un conjunto abierto $B \subseteq \mathbf{R}^m$. Tenemos que probar que

$$\vec{f}^{-1}(B) = \{\vec{x} \in D \mid \vec{f}(\vec{x}) \in B\}$$

es la intersección de D con un conjunto abierto A de $\mathbf{R}^n$. Ahora bien, como para cada $\vec{x} \in \vec{f}^{-1}(B)$, el abierto B es un entorno de $\vec{f}(\vec{x})$ en $\mathbf{R}^m$, la defnción de continuidad en tales $\vec{x}$ asegura la existencia de un entorno $V_{\vec{x}} \subseteq \mathbf{R}^n$ de $\vec{x}$ tal que

$$\vec{f}(V_{\vec{x}} \cap D) \subseteq B.$$

Por la definición de entorno, existe un abierto $A_{\vec{x}}$ tal que $\vec{x} \in A_{\vec{x}} \subseteq V_{\vec{x}}$. La unión de todos estos abiertos $A_{\vec{x}}$ para $\vec{x} \in \vec{f}^{-1}(B)$ es un abierto A tal que $\vec{f}(A \cap D) \subseteq B$. En consecuencia $A \cap D \subseteq \vec{f}^{-1}(B)$. Como por otro lado cada $\vec{x} \in f^{-1}(B)$ pertenece a $A_{\vec{x}} \cap D \subseteq A \cap D$, resulta que el conjunto A cumple con lo enunciado en la proposición ∎

6. Puntos de acumulación y límites

Un punto $\vec{a}$ de $\mathbf{R}^n$ es un *punto de acumulación* de un conjunto $D \subseteq \mathbf{R}^n$ si cada entorno V de $\vec{a}$ en $\mathbf{R}^n$ contiene una cantidad infinita de puntos de D. Esta misma definición es la que habíamos dado en el caso de la recta real. Ahora vamos a repetirla y extenderla al caso de $\mathbf{R}^n$. Igual que antes vale la siguiente

6.1 Proposición. Una condición necesaria y suficiente para que un conjunto $C \subseteq \mathbf{R}^n$ sea cerrado es que contenga a todos sus puntos de acumulación.

Demostración. Supongamos primero que C es cerrado y que $\vec{a}$ es un punto de acumulación de C. Como $\mathbf{R}^n \setminus C$ es abierto, si $\vec{a}$ no fuera un elemento de C, habría un entorno V de $\vec{a}$ tal que $V \subseteq \mathbf{R}^n \setminus C$. En consecuencia $V \cap C$ sería vacío y no podría contener infintos elementos como lo impone la definición de punto de acumulación. Por lo tanto no queda otra alternativa más que $\vec{a} \in C$.

Recíprocamente, supongamos que C contiene a todos sus puntos de acumulacion y probemos que es cerrado, es decir, probemos que $\mathbf{R}^n \setminus C$ es abierto. Por hipótesis, un elemento $\vec{a} \in \mathbf{R}^n \setminus C$ no puede ser punto de acumulación de C. Luego debe existir un entorno V de $\vec{a}$ cuya intersección con C sea finita

$$V \cap C = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m\}.$$

Puesto que todo conjunto finito es cerrado, su complemento $\mathbf{R}^n \setminus \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m\}$ es abierto. Así, el conjunto

$$V' := V \cap \big(\mathbf{R}^n \setminus \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m\}\big)$$

es un entorno de $\vec{a}$ que no contiene puntos de C. Es decir, V' es un entorno de $\vec{a}$ totalmente incluido en $\mathbf{R}^n \setminus C$ ▮

Cuando $\vec{a}$ es un punto de acumulación del dominio D de una función $\vec{f}\colon D \to \mathbf{R}^m$, cabe preguntarse si es posible extender $\vec{f}$ a una función que sea continua en $\vec{a}$. Existen dos posibilidades: (1) que $\vec{a} \in D$ y (2) que $\vec{a} \notin D$. En el primer caso, más que "extender" $\vec{f}$ a una función continua en $\vec{a}$ uno puede intentar *cambiar* el valor de $\vec{f}(\vec{a})$ tratando de lograr la continuidad en ese punto. En el segundo caso, hay que analizar si es posible definir $\vec{f}$ en $\vec{a}$ de modo de obtener una función continua en ese punto. Con independencia de si estamos en las condiciones de (1) o de (2), lo cierto es la continuidad que nos proponemos puede ser posible o imposible. Cuando es posible, tenemos la definición de límite

Definición. Dado un punto de acumulación $\vec{a}$ del dominio D de una función $\vec{f}\colon D \to \mathbf{R}^m$, decimos que el punto $\vec{b}$ es el *límite de $\vec{f}$ en $\vec{a}$* si la función

$$\vec{g}\colon D \cup \{\vec{a}\} \to \mathbf{R}^m$$
$$\vec{x} \mapsto \begin{cases} \vec{f}(\vec{x}); & \text{si } \vec{x} \neq \vec{a} \\ \vec{b}; & \text{si } \vec{x} = \vec{a} \end{cases}$$

es continua en $\vec{a}$. En tal caso escribimos

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) := \vec{b}.$$

Es claro de la definición que $\vec{f}$ es continua en $\vec{a}$ si, y sólo si, $\vec{f}$ está definida en $\vec{a}$ y además

$$\lim_{\vec{a}} \vec{f} = \vec{f}(\vec{a}).$$

En términos de epsilon y deltas, el punto $\vec{b}$ es el límite de $\vec{f}$ en $\vec{a}$ si, y sólo si, para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que cuando $\vec{x} \in D \setminus \{\vec{a}\}$ y $\mathrm{d}(\vec{x}, \vec{a}) < \delta$, resulta $\mathrm{d}(\vec{f}(\vec{x}), \vec{b}) < \epsilon$.

Ejercicio 1. Enuncie y demuestre (sin hacer ninguna cuenta con epsilon y delta) las propiedades para límite de la suma y de la composición de funciones.

7. Compactos

También la noción de *compacidad* se extiende fácilmente al caso de varias variables. Decimos que un conjunto $K \subseteq \mathbf{R}^n$ es *compacto* si cada cubrimiento por abiertos

$$K \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$$

posee un subcubrimiento finito. Es decir, existe un subconjunto finito L' de L tal que

$$K \subseteq \bigcup_{\lambda \in L'} A_\lambda.$$

Del mismo modo que en el caso de la recta real, es fácil ver que si C es un subconjunto cerrado de un conjunto compacto K, entonces C también es compacto. En efecto, todo cubrimiento abierto de C se puede extender a un cubrimiento abierto de K agregando, si fuese necesario, el abierto $\mathbf{R}^n \setminus C$. Por ser K compacto, tal cubrimiento poseerá un subcubrimiento finito. Si el conjunto $\mathbf{R}^n \setminus C$ forma parte del subcubrimiento, podríamos quitarlo y quedarnos con un subcubrimiento finito de C formado por miembros del cubrimiento original. Si el conjunto $\mathbf{R}^n \setminus C$ no forma parte del subcubrimiento finito, entonces el subcubrimiento mismo está formado por abiertos del cubrimiento original y ciertamente cubre a C. En cualquiera de los dos casos, el cubrimiento de C posee un subcubrimiento finito (de C). Es decir, hemos probado la siguiente

7.1 Proposición. Todo subconjunto cerrado de un conjunto compacto es compacto.

Los conjuntos compactos son, ellos mismos, cerrados. Para ver esto es necesario probar que si K es compacto y $\vec{a} \notin K$, entonces existe un entorno V de $\vec{a}$ tal que $V \cap K = \emptyset$. Para cada $\vec{x} \in K$, las bolas $B_{\vec{x}} := B(\vec{x}, d_{\vec{x}}/2)$ y $B(\vec{a}, d_{\vec{x}}/2)$, donde $d_{\vec{x}} := \mathrm{d}(\vec{x}, \vec{a})$, tienen intersección vacía (demuestre). Como los $B_{\vec{x}}$ forman un cubrimiento abierto de K, debe existir un subcubrimiento finito

$$K \subseteq B_{\vec{x}_1} \cup \cdots \cup B_{\vec{x}_m}.$$

Luego, si tomamos $d := \min_{1 \leq i \leq r}\{d_{\vec{x}_i}\}$, tendremos

$$\left(B_{\vec{x}_1} \cup \cdots \cup B_{\vec{x}_m}\right) \cap B(\vec{a}, d/2) = \emptyset$$

puesto que cada intersección $B_{\vec{x}_i} \cap B(\vec{a}, d/2)$ es vacía. De aquí resulta que $B(\vec{a}, d/2) \cap K = \emptyset$, como debíamos demostrar ∎

También es sencillo probar que los conjuntos compactos son acotados, puesto que las bolas $B_i := B(\vec{0}, i)$ forman un cubrimiento abierto de $\mathbf{R}^n$ cuando i recorre el conjunto de todos los números naturales. Un compacto K quedará cubierto por un subcubrimiento finito. Por ese motivo obtenemos que el compacto está contendido en alguno de los B_i (el más grande de los del subcubrimiento). Recapitulando, hasta ahora obtenemos

$$\text{compacto} \;\Rightarrow\; \text{cerrado y acotado.}$$

La recíproca también es cierta (lo mismo demostramos en el caso de la recta real). Para su demostración en el caso de $\mathbf{R}^n$ vamos a utilizar el siguiente razonamiento: si C es un conjunto cerrado y acotado, entonces por ser acotado existe un intervalo cerrado y acotado $I \subseteq \mathbf{R}$ tal que

$$C \subseteq \overbrace{I \times \cdots \times I}^{n \text{ veces}} =: I^n.$$

Luego, al ser C cerrado, para probar que C es compacto será suficiente probar que I^n es compacto (porque entonces C sería un cerrado dentro de un compacto y arriba vimos que un conjunto con esa propiedad es compacto). Cuando $n = 1$, ya sabemos que $I = I^n$ es compacto [*Nociones métricas y topológicas*, Teor. 2.2]. Por lo tanto, podemos proceder por inducción en n y probar que si I^n es compacto (Hipótesis Inductiva), entonces I^{n+1} también lo es. A fin de hacer esa demostración necesitamos dos lemas previos cuya demostración dejamos como ejercicio para el lector

7.2 Lema. Con las notaciones precedentes y suponiendo que I^n sea compacto (HI), se verifica que para cada $x \in I$, el conjunto $\{x\} \times I^n$ es compacto.

7.3 Lema. Si $x \in I$, $\vec{y} \in I^n$ y A es un abierto que contiene a $(x, \vec{y})$, entonces existe $\epsilon > 0$ (que depende de x y de $\vec{y}$ tal que

$$(x - \epsilon, x + \epsilon) \times B(\vec{y}, \epsilon) \subseteq A.$$

Establecidos estos lemas, tomemos ahora un cubrimiento abierto de I^{n+1}, es decir, supongamos que

$$I^{n+1} \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda.$$

Tenemos que probar la existencia de un subcubrimiento finito. Para cada par $x \in I$, $\vec{y} \in I^n$, existe un índice $\lambda \in L$ tal que $(x, \vec{y}) \in A_\lambda$. Por el segundo lema, debe existir un $\epsilon_{x,\vec{y}} > 0$ (dependiente de x y de $\vec{y}$) tal que

$$V_{x,\vec{y}} := (x - \epsilon_{x,\vec{y}}, x + \epsilon_{x,\vec{y}}) \times B(\vec{y}, \epsilon_{x,\vec{y}}) \subseteq A_\lambda.$$

Es claro que al variar $\vec{y}$ en I^n, los $V_{x,\vec{y}}$ forman un cubrimiento abierto de $\{x\} \times I^n$. Pero como por el primer lema el conjunto $\{x\} \times I^n$ es compacto, debe haber un número finito de ellos que cubran $\{x\} \times I^n$:

$$\{x\} \times I^n \subseteq V_{x,\vec{y}_1} \cup \cdots \cup V_{x,\vec{y}_m}.$$

Considereando el mínimo de los $\epsilon_{x,\vec{y}_i}$, obtenemos un número positivo ϵ_x tal que

$$(x-\epsilon_x, x+\epsilon_x)\times I^n \subseteq V_{x,\vec{y}_1}\cup\cdots\cup V_{x,\vec{y}_m}.$$

En consecuencia, $(x-\epsilon_x, x+\epsilon_x)\times I^n$ puede ser cubierto por un número finito de abiertos A_λ, digamos, aquellos cuyos índices pertenecen al subconjunto finito $L_x \subseteq L$. Ahora, dado que I es compacto y los intervalos abiertos $(x-\epsilon_x, x+\epsilon_x)$ forman un cubrimiento de I, debe haber un subcubrimiento finito:

$$I \subseteq (x_1-\epsilon_{x_1}, x_1+\epsilon_{x_1})\cup\cdots\cup(x_s-\epsilon_{x_s}, x_s+\epsilon_{x_s}).$$

Reuniendo los A_λ cuyos índices pertenezcan al conjunto

$$L_{x_1}\cup\cdots\cup L_{x_s}$$

obtenemos un subcubrimiento finito del original. Hemos demostrado así el siguiente

7.4 Teorema. Un conjunto $K\subseteq\mathbf{R}^n$ es compacto si, y sólo si, es cerrado y acotado.

Cuando combinamos la noción de compacto con la de función continua obtenemos una importante propiedad cuyo enunciado y demostración damos a continuación.

7.5 Proposición. . Si $\vec{f}: K\to\mathbf{R}^m$ es una función continua definida en un conjunto compacto $K\subset\mathbf{R}^n$, entonces la imagen $\vec{f}(K)$ es un conjunto compacto en $\mathbf{R}^m$.

Demostración. Consideremos un cubrimiento abierto de $\vec{f}(K)$

$$\vec{f}(K)\subseteq\bigcup_{\lambda\in L}B_\lambda$$

en donde cada B_λ es un abierto de $\mathbf{R}^m$. Para demostrar que $\vec{f}(K)$ es compacto tenemos que probar que existe un subcubrimiento finito. Por la prop. 5.1 la imagen inversa $\vec{f}^{-1}(B_\lambda)$ de cada abierto B_λ es la interesección de un abierto A_λ con K. Como los B_λ cubren $\vec{f}(K)$, estos abiertos A_λ cubren K (demuestre). Usando que K es compacto, este cubrimiento debe contener un subcubrimiento finito

$$K\subseteq A_{\lambda_1}\cup\cdots\cup A_{\lambda_m}.$$

En consecuencia (demuestre)

$$\vec{f}(K)\subseteq B_{\lambda_1}\cup\cdots\cup B_{\lambda_m}$$

como queríamos demostrar ∎

8. Conexos

Otra noción topológica fundamental es la de "conexión". Intuitivamente un subconjunto de $\mathbf{R}^n$ está "desconectado" cuando está *quebrado* o *partido* en dos o más subconjuntos que no se tocan entre sí y que de algún modo están *separados* unos de otros. Otra forma de enteder la desconexión es pensando que el conjunto contiene al menos dos puntos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ para los que no hay ningún *camino* continuo que vaya desde $\vec{a}$ hasta $\vec{b}$ sin pasar por puntos que están fuera del conjunto. En esta sección vamos a definir precisamente esta noción y a estudiar algunas de sus propiedades más básicas.

Definición. Un conjunto $D \subseteq \mathbf{R}^n$ es *disconexo* si existen dos conjuntos abiertos A y B tales que

i) $A \cap D \neq \emptyset$
ii) $B \cap D \neq \emptyset$
iii) $A \cap B \cap D = \emptyset$
iv) $D \subseteq A \cup B$.

Un conjunto es *conexo* si no es disconexo.

En la definición los conjuntos A y B *escinden* a D en dos partes: la que está dentro de A y la que está dentro de B. Estas dos partes están *separadas* debido al hecho de que tanto A como B son conjuntos disjuntos y abiertos. En efecto, si tomamos un punto $\vec{a} \in D$ que esté (digamos) en la parte de A, habrá una bola $B(\vec{a}, \epsilon)$ totalmente metida en A y por lo tanto disjunta de los puntos de D que están en B.

Un ejemplo sencillo de conjunto disconexo es la unión de dos intervalos disjuntos I y J en $\mathbf{R}$. Siendo los intervalos disjuntos debe existir un punto $a \in \mathbf{R}$ que sea mayor que todos los elementos de I y menor que todos los elementos de J (o a la inversa). Así, los abiertos $(-\infty, a)$ y $(a, +\infty)$ cumplirán con las cuatro condiciones de la definición de disconexo para $D := I \cup J$. Más generalmente la unión de dos abiertos no vacíos y disjuntos es un conjunto disconexo.

En $\mathbf{R}$ los conjuntos conexos son los intervalos (finitos o infinitos) como lo muestra la siguiente

8.1 Proposición. Un subconjunto D de $\mathbf{R}$ sea conexo si, y sólo si, es un intervalo.

Demostración. Supongamos que D es conexo. En virtud de [*Funciones Continuas*, Lema 2.5], para probar que D es un intervalo es suficiente mostrar que si $a < b$ son dos elementos de D, entonces cada x tal que $a < x < b$, es también un elemento de D. Si esta propiedad no fuese cierta, existirían tres puntos $a < x_0 < b$ con $a, b \in D$ y $x_0 \notin D$. Tomando $A := (-\infty, x_0)$ y $B := (x_0, +\infty)$ obtenemos dos conjuntos abiertos que verifican las cuatro propiedades de la definición de conjunto disconexo.

Recíprocamente, supongamos que D es un intervalo y probemos que es conexo. Si D fuese disconexo habría dos abiertos A y B con las cuatro propiedades de la definición de conjunto disconexo. Podemos suponer que existen $a \in A \cap D$ y $b \in B \cap D$ con $a < b$. Consideremos el supremo

$$s := \sup[a, b] \cap A.$$

Como $s \in [a, b] \subseteq D$ (puesto que $[a, b]$ es un intervalo cerrado), hay dos posibilidades: (1) $s \in [a, b] \cap A$ o (2) $s \in [a, b] \cap B$. Supongamos que vale (1). Entonces $s < b$ puesto que $b \notin A$. Por lo tanto existe $\epsilon_1 > 0$ tal que $s + \epsilon_1 < b$. Usando ahora que A es abierto debe existir $\epsilon_2 > 0$ tal que $(s, s + \epsilon_2) \subseteq A$. Si ϵ es el mínimo entre ϵ_1 y ϵ_2, entonces $(s, s + \epsilon) \subseteq [a, b] \cap A$. Como esto contradice el hecho de que s es cota superior de $[a, b] \cap A$, vemos que (1) no es posible. Supongamos entonces que vale (2). En este caso es $a < s$. Razonando como antes, llegamos a la conclusión de que existe $\epsilon > 0$ tal que $(s - \epsilon, s) \subseteq [a, b] \cap B$. Luego $(s - \epsilon, s)$ no puede contener ningún punto de $[a, b] \cap A$, lo cual contradice la defínción de supremo. Dado que ambas situaciones son imposibles, concluímos que los conjuntos A y B no pueden existir y en consecuencia que D es conexo ∎

En la sección anterior vimos que las funciones contínuas aplican compactos en compactos. Ahora vamos a ver que también aplican conexos en conexos. En efecto, supongamos que $\vec{f}\colon D \to \mathbf{R}^m$ es una función continua con dominio conexo $D \subseteq \mathbf{R}^n$. Para probar que la imagen $\vec{f}(D)$ es conexa, tenemos que probar que no existen dos abirtos A y B de $\mathbf{R}^m$ con las siguientes propiedades

i) $A \cap \vec{f}(D) \neq \emptyset$
ii) $B \cap \vec{f}(D) \neq \emptyset$
iii) $A \cap B \cap \vec{f}(D) = \emptyset$
iv) $\vec{f}(D) \subseteq A \cup B$.

Razonando por el absurdo, supongamos que sí. Tomando imágenes inversas obtenemos dos conjuntos abiertos $\vec{f}^{-1}(A)$ y $\vec{f}^{-1}(B)$ de $\mathbf{R}^n$ tales que (demuestre)

i) $\vec{f}^{-1}(A) \cap D \neq \emptyset$
ii) $\vec{f}^{-1}(B) \cap D \neq \emptyset$
iii) $\vec{f}^{-1}(A) \cap \vec{f}^{-1}(B) \cap D = \emptyset$
iv) $D \subseteq \vec{f}^{-1}(A) \cup \vec{f}^{-1}(B)$

lo que contradice nuestra hipótesis de que D era conexo. El enunciado preciso de lo que acabamos de probar es

8.2 Proposición. Si $\vec{f}\colon D \to \mathbf{R}^m$ es una función continua definida en un conjunto conexo $D \subseteq \mathbf{R}^n$, entonces su imagen $\vec{f}(D)$ es un conexo de $\mathbf{R}^m$.

Ejercicio 1. Demuestre que si $(D_\lambda)_{\lambda \in L}$ es una familia de conjuntos conexos en $\mathbf{R}^n$ tales que su intersección $\bigcap_{\lambda \in L} D_\lambda$ no es vacía, entonces la unión $\bigcup_{\lambda \in L} D_\lambda$ es también un conjunto conexo.

Ejercicio 2. Demuestre que si $D_1, \ldots, D_n$ es una sucesión de conjuntos conexos tales que $D_i \cap D_{i+1} \neq \emptyset$, encontes la unión $\bigcup_{i=1}^n D_i$ es conexo.