Práctica 4

Muestreo, Interpolación y aplicaciones — Segundo cuatrimestre 2014

1. Sea H un espacio de Hilbert y $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in H$.

   (a) Si $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es Bessel entonces $\sum c_k\, f_k$ converge incondicionalmente para toda $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2$.

   (b) Si $\sum c_k\, f_k$ converge para toda $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es Bessel.

2. Sea $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in H$ completo, donde H es un espacio de Hilbert. Pruebe que si $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ admite una sucesión biortogonal $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, ésta es única.

3. Sea H un espacio de Hilbert, $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in H$ un frame de H y $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un dual alternativo, es decir, $\sum\langle f, g_k\rangle\, f_k = f \quad \forall f \in H$. Si $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es Bessel, entonces es un frame.

4. ¿Es $L^2(0,1)$ un RKHS?

5. Sea H un RKHS con núcleo K y $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en H. Pruebe que $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es completo si y sólo si $K(x,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} |e_n(x)|^2 \quad \forall x$

6. Sea X un espacio de Banach. Demuestre que dos bases $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son equivalentes en X si y sólo si existe $T : X \to X$, lineal, acotado e inversible, tal que $Tx_n = y_n$.

7. Sea H un espacio de Hilbert.

   (a) Dos bases equivalentes tienen biortogonales equivalentes.

   (b) Las bases de Riesz son todas equivalentes.