Práctica 3

Muestreo, Interpolación y aplicaciones — Segundo cuatrimestre 2014

1. El teorema de Shannon dice que:

   Si $f \in PW_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$ luego $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)\frac{\sin\pi(x-k)}{\pi(x-k)}$.

   Pruebe que:

   a) Si $Sop(f) \subset [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ donde $a > 0$ luego $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\frac{k}{a})\frac{\sin\pi(x-\frac{k}{a})}{\pi(x-\frac{k}{a})}$.

   b) Si $a' > a > 0$ se puede reconstruir f a partir de $f(\frac{k}{a'})$.

   c) Lo anterior no vale si $0 < a' < a$.

2. Se define al Seno Cardinal como:

$$\operatorname{sinc}(x) := \begin{cases} \frac{\sin\pi x}{\pi x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

   Pruebe que $\check{\chi}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x) = \operatorname{sinc}(x)$.

3. Teorema de Shannon generalizado:

   Γ un reticulado y Ω un compacto que tesela por Γ, si $f \in PW_\Omega$, luego

$$f(x) = \frac{1}{|\Omega|}\sum_{\gamma\in\widetilde{\Gamma}} f(\gamma)\check{\chi}_\Omega(x-\gamma)$$

4. El teorema de Poisson dice:

   Si $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ tales que $|f(x)| + |\hat{f}(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{1+\delta}}$ $\quad C, \delta > 0$, luego $f, \hat{f}$ son continuas y $\forall\, x \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{|\Omega|}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{2\pi ikx} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k)$$

   Generalizar el teorema a:

   Si $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y $\alpha\beta = 1$ luego

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k\beta) = \alpha\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k\alpha)$$