Práctica 2

Muestreo, Interpolación y aplicaciones — Segundo cuatrimestre 2014

1. Probar que:

   a) $f, g \in L^1(T) \Rightarrow \widehat{(g * f)} = \hat{f}.\hat{g}$

   b) $c, d \in \ell^1(\mathbb{Z}) \Rightarrow \widehat{(c * d)} = \hat{c}.\hat{d}$

2. Sea $d_N = \sum_{k=-N}^{N} e^{2\pi i k x}$ el Núcleo de Dirchlet. Probar que:

$$d_N = \frac{\sin(2N+1)\pi x}{\sin(\pi x)}$$

3. Sea $W_N(n) := \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{N+1} & |n| \leq N+1 \\ 0 & |n| > N+1 \end{cases}$ y $w_N := \hat{W}_N$ el Núcleo de Fejer.
   Probar que w_N es una aproximación de la identidad.

   Sugerencia: ver que

$$w_N(x) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin(N+1)\pi x}{\sin(\pi x)}\right)^2$$

4. $f \in L^1(T)$ y $\hat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \Rightarrow f \in L^2(T)$

5. $f \in L^2(T)$ y $\hat{f}(t) = \int_T f(x) e^{-2\pi i t x}\, dx \ \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n + A)|^2 = \|f\|_2^2 \quad \forall A \in \mathbb{R}$

6. Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible y $M_E = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{f} \equiv 0 \text{ en E}\}$. Probar que:

   a) M_E es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{R})$.

   b) Si $M_E = M_{E'} \Rightarrow |E \triangle E'| = 0$.

7. Fórmula de Poisson en retículos:

   Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, Γ un retículo de $\mathbb{R}^n$ y D el dominio fundamental de Γ. Entonces para todo $x \in D$

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} f(x + \gamma) = |\Gamma|^{-1} \sum_{\gamma^* \in \Gamma^*} \hat{f}(\gamma^*) e^{2\pi i\, x \cdot \gamma^*}.$$

   Aquí $\mathcal{S}$ es la clase de Schwartz y Γ^* el retículo dual de Γ.