Teoría Geométrica de la Medida

Ejercicios

Ejercicio 18: (Clase 9, 15/05)

Sea
$$D(A,B) = \sup\big\{d(x,B) : x \in A\big\}$$
y
$$\widetilde{d}_H = \text{máx}\big\{D(A,B), D(B,A)\big\},$$
probar que
$$\widetilde{d}_H = d_H,$$
donde d_H es la métrica Hausdorff, definida por
$$d_H(A,B) = \text{ínf}\big\{\varepsilon > 0 : A \subseteq B^\varepsilon \text{ y } B \subseteq A^\varepsilon\big\}.$$

Ejercicio 19: (Clase 9, 15/05)

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\psi : A \to \mathbb{R}^n$ una función Lipschitz, es decir, existe $C > 0$ tal que $\|\psi(x) - \psi(y)\| \leq C\|x - y\|\ \forall\ x, y \in A$.

Probar que para cada $s > 0$ se tiene que
$$h^s(\psi(A)) \leq C^s h^s(A),$$
y en particular
$$\dim_H(\psi(A)) \leq \dim_H(A).$$

Ejercicio 20: (Clase 9, 15/05)

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\psi : A \to \mathbb{R}^n$ una función que satisface lo siguiente: existe $\alpha \in (0,1]$ tal que $\|\psi(x) - \psi(y)\| \leq C\|x - y\|^\alpha\ \forall\ x, y \in A$.

Probar que bajo estas condiciones,
$$\dim_H(\psi(A)) \leq \frac{1}{\alpha}\dim_H(A).$$

Ejercicio 21: (Clase 10, 17/05)

Sea $\phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$, con $\varphi_i : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ contractivas. Probar:

(a) Si existe $B \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que $\phi(B) \subseteq B$, entonces $A_\phi \subseteq B$.

(b) Si existe $B \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que $\phi(B) \supseteq B$, entonces $A_\phi \supseteq B$.

Ejercicio 22: (Clase 10, 17/05)

(Teorema de Selección de Blaske)

Sea $\mathcal{C}$ una clase de compactos no vacíos de $\mathbb{R}^d$, uniformemente cotada. Es decir, existe un conjunto acotado $B \subseteq \mathbb{R}^d$, tal que $C \subseteq B$ para todo $C \in \mathcal{C}$.

Demostrar que existe una sucesión $\{C_n\}_n \in \mathcal{C}$ y un compacto no vacío C (que no necesariamente pertenece a $\mathcal{C}$), tal que la sucesión converge a C en la distancia Hausdorff.