Teoría Geométrica de la Medida

Ejercicios

Ejercicio 1: Sea μ una medida definida sobre Ω y $\{E_k\}_k$ una sucesión de conjuntos medibles disjuntos. Entonces, para todo conjunto arbitrario $A \subseteq \Omega$, se tiene:

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A \cap E_k) + \mu\Big(A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big).$$

Ejercicio 2: Sea $\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de medidas en Ω. Para cada $A \subseteq \Omega$, definimos $\nu(A)$ como

$$\nu(A) = \sup_{\alpha \in I} \mu_\alpha(A).$$

Probar que ν es una medida definida en Ω.

Ejercicio 3: Sea μ una medida en Ω y $A \subseteq \Omega$ un conjunto arbitario. Probar:

(a) Si $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots \subseteq E_n \subseteq \ldots$, son todos conjuntos medibles, entonces

$$\mu\Big(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \lim_{n \to \infty} \mu(A \cap E_n).$$

(b) Si $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots \supseteq E_n \supseteq \ldots$, son todos conjuntos medibles y además $\mu(A \cap E_k) < \infty$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$\mu\Big(A \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \lim_{n \to \infty} \mu(A \cap E_n).$$

Ejercicio 4: Sea μ una medida regular en Ω. Probar:

(a) Si $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$ son subconjuntos arbitarios de Ω, entonces

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).$$

(b) El resultado anterior es falso para intersecciones, aún si se tiene que $\mu(A_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 5: Sea μ una medida en Ω. Probar que si se construye la medida λ por el método I, a partir de la premedida $(\Gamma, \mathcal{C})$, donde $\Gamma = \mu$ y $\mathcal{C} = \mathbb{P}(\Omega)$, entonces $\lambda = \mu$.

Ejercicio 6: Sea μ una medida en Ω, $B \subseteq \Omega$ un conjunto arbitario y $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos medibles de Ω. Entonces:

(*a*) $\mu(B \cap A_*) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(B \cap A_n)$.

(*b*) Si $\mu\big(B \cap \bigcup_{k\geq n} A_k\big) < \infty$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\limsup_{n\to\infty} \mu(B \cap A_n) \leq \mu(B \cap A^*).$$

Recordar que

$$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\geq n} A_k \qquad \text{y} \qquad A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k\geq n} A_k.$$

Ejercicio 7: Dada una medida μ en Ω y un conjunto $A \subseteq \Omega$, se define μ_A como

$$\mu_A(B) = \mu(A \cap B) \qquad \forall B \subseteq \Omega.$$

Probar que μ_A es una medida en Ω.

Ejercicio 8: Sean μ una medida en Ω y $A \subseteq \Omega$. Probar que si E es un subconjunto μ-medible de Ω, entonces E es μ_A-medible. Es decir, $M_\mu \subseteq M_{\mu_A}$.

Ejercicio 9: Sea (X, d) un espacio métrico y μ una medida boreliana en X. Dados $B \in \beta(X)$ y $\varepsilon > 0$, se tiene:

(*a*) Si $\mu(B) < \infty$, entonces existe un conjunto F cerrado contenido en B, tal que $\mu(B \setminus F) < \varepsilon$.

(*b*) Si $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, con G_n abierto y de medida finita para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces existe G abierto, tal que $G \supseteq B$ y $\mu(G \setminus B) < \varepsilon$.

(*c*) Si μ es borel regular, entonces los items (*a*) y (*b*) valen para B conjunto μ-medible.

Ejercicio 10 Dados $a, b \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{R}(a, b)$ denota el rectángulo definido como

$$\mathcal{R}(a, b) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i, \text{para } i = 1 \ldots n\}$$

Sea $\mathfrak{R}$, la clase de todos los rectángulos definidos anteriormente y Γ la premedida sobre la clase $\mathfrak{R}$ que verifica $\Gamma(\mathcal{R}(a, b)) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$.

Probar que si $\lambda = MI(\Gamma, \mathfrak{R})$ y $\nu = MII(\Gamma, \mathfrak{R})$, entonces $\lambda = \nu$.

Sugerencia: Para probar que $\lambda \geq \nu$, suponer primero que $\lambda(E) < \infty$ y, dado $\varepsilon > 0$, tomar un cubrimiento de modo tal que se verifique $\sum_k \Gamma(\mathcal{R}_k) \leq \lambda(E) + \varepsilon$. Para armar un δ-cubrimiento, partir cada $\mathcal{R}_k$ en rectangulitos de tamaño adecuado y agrandarlos en $\eta/2^k$ para que el nuevo cubrimiento contenga el borde.

Ejercicio 11 Para $A \subseteq \mathbb{R}^n$, probar que

$$\dim_H(A) = \sup\{s \in [0, +\infty) : h^s(A) = +\infty\}.$$

Ejercicio 12 Dada una sucesión $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0, \frac{1}{2})$, se construye un conjunto estilo Cantor (notado como $C_{\{\lambda_n\}}$) de forma que en el paso n-ésimo se toman 2^n intervalos de longitud $\lambda_1 \dots \lambda_n$. Se tiene entonces que

$$\frac{|I_{i_1\dots i_n}|}{|I_{i_1\dots i_{n+1}}|} = \lambda_n,$$

donde $I_{i_1\dots i_n}$ es un intervalo del paso n-ésimo e $I_{i_1\dots i_{n+1}}$ es uno de los dos intervalos del paso $n+1$-ésimo que se obtienen de $I_{i_1\dots i_n}$.
Probar que si $h \in \mathcal{H}$, siendo

$$\mathcal{H} = \{f : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} : \text{ continuas a derecha, no decrecientes y } f(t) > 0 \text{ si } t > 0\}$$

y $h(s_k) = \frac{1}{2^k}$, donde $s_k = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k$, entonces $\mu^h(C_{\{\lambda_n\}}) \in [\frac{1}{4}, 1]$.

Ejercicio 13: Demostrar que:

$$\begin{aligned}\overline{\dim}_M(A) &= \text{ínf}\left\{0 < s \,/\, \limsup_{\varepsilon\to 0^+} N(A,\varepsilon)\,\varepsilon^s < +\infty\right\}\\ &= \sup\left\{0 < s \,/\, \limsup_{\varepsilon\to 0^+} N(A,\varepsilon)\,\varepsilon^s = +\infty\right\}\\ &= \sup\left\{0 < s \,/\, \limsup_{\varepsilon\to 0^+} N(A,\varepsilon)\,\varepsilon^s > 0\right\}.\end{aligned}$$

Y que para $\underline{\dim}_M(A)$ vale lo mismo usando lím inf en lugar de lím sup.

Ejercicio 14: Probar que:

$$\dim_H(A) \leq \underline{\dim}_M(A) \leq \overline{\dim}_M(A) \leq n.$$

Ejercicio 15: Probar que:

$$\overline{\dim}_M(A) = \limsup_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\log(N(A,\varepsilon))}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}$$

$$\underline{\dim}_M(A) = \liminf_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\log(N(A,\varepsilon))}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}.$$

Ejercicio 16: Sea $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \,/\, n \in \mathbb{N}\}$, probar que

$$\overline{\dim}_M(A) = \frac{1}{2}.$$

Demostrar además que

$$\overline{\dim}_M(\{x\}) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Observar que de esta forma se probaría que $\overline{\dim}_M$ no cumple que para toda sucesión $\{A_n\}_n$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$,

$$\overline{\dim}_M\Big(\bigcup_n A_n\Big) = \sup_n \, \overline{\dim}_M(A_n).$$

Ejercicio 17: Probar que p^s, la medida packing s, es métrica.

Recordar que p^s se define por:

$$p^s(A) = \text{ínf}\left\{ \sum_k P^s(A_k) \,/\, A \subseteq \bigcup_k A_k \right\},$$

con

$$P^s(A) = \inf_{\delta>0} P^s_\delta(A) = \lim_{\delta\to 0^+} P^s_\delta(A)$$

y

$$P^s_\delta(A) = \sup\Big\{ \sum_i |B_i|^s \,/\, \{B_i\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ son bolas de radio menor o igual a } \delta,$$
$$\text{cerradas, disjuntas y centradas en algún elemento de } A\Big\}.$$