27 de Diciembre de 2002

Recuperatorio del Segundo Parcial
Análisis Real

(1) Sean $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$ y $0 \leq \alpha \leq 1$. Probar que si $f \in L^{p_1}(\mathbb{R}) \cap L^{p_2}(\mathbb{R})$ y $\dfrac{1}{p} = \dfrac{\alpha}{p_1} + \dfrac{1-\alpha}{p_2}$ entonces $f \in L^p(\mathbb{R})$ y

$$\|f\|_p \leq \|f\|_{p_1}^{\alpha} . \|f\|_{p_2}^{1-\alpha}.$$

(2) Probar que si $f \in L^p(\mathbb{R})$ con $1 \leq p < \infty$ entonces

$$\|f(x+h) - f(x)\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0 \text{ cuando } h \to 0.$$

(3) Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ de soporte compácto y g continua en $\mathbb{R}^n$. Probar que si $1 \leq p \leq \infty \Rightarrow f * g$ es continua.

(4) Sea $f \geq 0$ y medible en $\mathbb{R}$. Dado $h > 0$, definimos

$$g_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\ dt.$$

Probar que para cada intervalo (a, b) finito

$$\int_a^b g_h(x)\ dx \leq \int_{\mathbb{R}} f(x)\ dx.$$

(5) Sea f medible definida sobre $E \subset \mathbb{R}^n$. Para cada $t > 0$ se define

$$w(t) = |\{x \in E : |f(x)| > t\}|.$$

(a) Probar que $\int_E |f(x)|\ dx = \int_0^\infty w(\alpha) d\alpha$.
(b) Si existe $\gamma > 1$ tal que

$$\lim_{t \to \infty} t^{\gamma} w(\alpha) = 0$$

entonces $f \in L^1(E)$.