21 de Diciembre de 2002

Recuperatorio del Primer Parcial
Análisis Real

(1) Sea $E \subset [0,1]$ el subconjunto formado por aquellos números cuyo desarrollo binario viene dado por

$$E = \{x \in [0,1] / \ x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k} \ : a_{2k} = 0\}.$$

Probar que E es medible y calcular su medida.

(2) Sea $f : [0, +\infty) \to R$ continua, integrable y decreciente. Hallar

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} f(x^n) dx$$

Justificar la respuesta !!

(3) Si $f(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$ y las f_n son continuas $\forall\, n$, entonces f es medible Borel.

(4) Si f es monótona entonces f es medible Borel.

(5) Probar que

$$\int_o^1 \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} \to 0$$

si y solo si $f_n \to f$ en medida en $[0,1]$.