ANALISIS REAL.

Segundo Cuatrimestre de 2002.

PRACTICA 7 : MEDIDA EN ESPACIOS ABSTRACTOS.

1. Un espacio (X, Σ, μ) se dice de medida completa si dado $Z \in \Sigma$ tal que $\mu(Z) = 0$, para cada $Y \subseteq Z$ resulta $Y \in \Sigma$ y $\mu(Y) = 0$. En este caso, probar que:

   a) Si $Z_1 \in \Sigma,\ Z_1 \Delta Z_2 \in \Sigma$ y $\mu(Z_1 \Delta Z_2) = 0$, entonces $Z_2 \in \Sigma$.

   b) Si f es medible y $f = g$ a.e., entonces g es medible.

2. Sean X un conjunto y $A_1, \ldots, A_N$ subconjuntos disjuntos de X tal que $\cup_{i=1}^{N} A_i = X$. Sea Σ la $\sigma-$'algebra generada por $\{A_1, \ldots, A_N\}$. Probar:

   a) $B \in \Sigma$ si y s'olo si existen $i_1, \ldots, i_k$ tales que $B = \cup_{j=1}^{k} A_{ij}$.

   b) Si f es $\Sigma-$medible, entonces f es constante sobre cada A_i.

3. Teorema de Egorov: Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y E un conjunto medible tal que $\mu(E) < \infty$. Sea $(f_k)_{k\geq 1}$ una sucesi'on de funciones medibles sobre E tal que f_k es finita a.e. en E y $(f_k)_{k\geq 1}$ converge a.e. en E a un l'imite finito. Entonces dado $\epsilon > 0$, existe un conjunto medible $A \subseteq E$ con $\mu(E \backslash A) < \epsilon$ tal que $(f_k)_{k\geq 1}$ converge uniformemente en A.

4. Si (X, Σ, μ) es un espacio de medida y si f y f_k son medibles y finitas a.e. en un conjunto medible E, entonces $(f_k)_{k\geq 1}$ converge en medida sobre E a f ($f_k \overset{\mu}{\to} f$) si para cada $\epsilon > 0$,
$$\lim_{k\to\infty} \mu(\{x \in E : |f(x) - f_k(x)| > \epsilon\}) = 0.$$
   Probar:

   a) Si $f_k \to_k f$ a.e. sobre E y $\mu(E) < \infty$, entonces $f_k \overset{\mu}{\to} f$ sobre E.

   b) Si $f_k \overset{\mu}{\to} f$ sobre E, existe una subsucesi'on $(f_{kj})_{j\geq 1}$ tal que $f_{kj} \to_j f$ a.e. en E.

5. Sea (X, Σ, μ) espacio de medida finita. Sean $(f_n)_{n\geq 1}$ y f funciones medibles y finitas a.e.. Probar que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge casi uniformemente a f si y s'olo si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge a f a.e..

6. Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida y μ y ν dos medidas sobre Σ tales que $\mu(A) \leq \nu(A)$, para todo $A \in \Sigma$. Probar que
$$f \in L^1(X, \nu) \qquad \Rightarrow \qquad f \in L^1(X, \mu).$$

7. Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida y $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesi'on de funciones medibles.

a) Si $\int_X \frac{|f_n|}{|f_n|+1} d\mu \to_{n\to\infty} 0$, probar que $f_n \overset{\mu}{\to} 0$.

b) Si $\mu(X) < \infty$ y $f_n \overset{\mu}{\to} 0$, probar que $\int_X \frac{|f_n|}{|f_n|+1} d\mu \to_{n\to\infty} 0$.

8. Sean $X = \mathrm{N}$, $\Sigma = P(\mathrm{N})$ y $\mu(A) = C(A)$. Probar que $f \in L^1(\mathrm{N}, \mu)$ si y s'olo si $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty$ y, en este caso $\int_{\mathrm{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

9. Sean $X = N$ y μ la medida sobre N tal que: $\mu(E) = \sum_{n:n\in E} \frac{1}{n^2}$.

   a) Probar que μ es una medida finita.

   b) Para cada $k \in N$, definimos $f_k : X \to R$,

$$f_k(n) = \begin{cases} \sqrt{n} & , \quad 1 \leq n \leq k \\ 0 & , \quad k < n. \end{cases}$$

   Probar que $(f_k)_{k\geq 1}$ converge en μ–medida.

   c) Sea $f : X \to R$, $f(n) = \sqrt{n}$ $(n \in N)$. ¿Para qu'e valores de $p \geq 1$, resulta $f \in L^p(X, \mu)$?

10. Sean (X, Ω, ν) un espacio de medida finita y $\varphi : X \to R_{>0}$ una funci'on ν–medible. Probar que:

    a) si φ es medible entonces est'a definida $\int_X \varphi \ln(\varphi)\ d\nu$,

    b) si φ pertenece a $L^2(X, d\nu)$ entonces $\varphi \ln(\varphi)$ pertenece a $L^1(X, d\nu)$.

11. Sean $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ espacio medible, $\mu : \mathcal{F} \to \overline{R}_{\geq 0}$ que satisface:

    a) $A, B \in \mathcal{F} \ \wedge \ A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow \ \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

    b) $A_n \in \mathcal{F}\ (n \in N) \ \wedge \ A_n \searrow \emptyset \ \Rightarrow \ \text{lím}_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

    Probar que μ es una medida.

12. Sean $S^1 = \{z \in \mathcal{C} : |z| = 1\}$, $\varphi : [0, 1) \to S^1$, $\varphi(t) = e^{2\Pi i t}$. En S^1 se considera la $\sigma-$'algebra
$$\mathcal{A} = \{A \subseteq S^1 : \varphi^{-1}(A) \text{ es medible Lebesgue}\}$$
    y la medida m sobre $\mathcal{A}$ definida por:
$$m(A) = |\varphi^{-1}(A)|.$$
    Dada $f : S^1 \to R_{\geq 0}$, tal que $f \circ \varphi$ es medible Lebesgue, probar que f es $\mathcal{A}-$medible y
$$\int_{S^1} f\ dm = \int_0^1 f \circ \varphi\ dt.$$

13. Sea ν una medida con signo sobre el espacio medible (X, Σ). Sean A un conjunto positivo y B un conjunto negativo con respecto a ν tales que: $X = A \cup B$ y $A \cap B = \phi$. Dado $E \in \Sigma$, probar:

   a) $\nu^+(E) = \nu(E \cap A) = \sup\{\nu(H) : H \subseteq E, H \in \Sigma\}$,

   b) $-\nu^-(E) = \nu(E \cap B) = \inf\{\nu(H) : H \subseteq E, H \in \Sigma\}$.

14. Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida, f tal que existe $\int_X f d\mu$ y $\nu(E) = \int_E f d\mu$ $(E \in \Sigma)$. Probar que:

   a) $\nu^+(E) = \int_E f^+ d\mu$ $(E \in \Sigma)$,

   b) $\nu^-(E) = \int_E f^- d\mu$ $(E \in \Sigma)$.

15. *a*) Sean λ y μ medidas sobre (X, Σ) y $\lambda(X) < \infty$. Probar:

$$\lambda \ll \mu \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 :\ \mu(E) < \delta\ \Rightarrow\ \lambda(E) < \epsilon.$$

   b) Demostrar que la hip'otesis $\lambda(X) < \infty$ es necesaria en (a). (Sug. Considerar μ la medida de Lebesgue en $(0, 1)$ y $\lambda(E) = \int_E \frac{dt}{t}$ para todo $E \subseteq (0, 1)$ medible Lebesgue.)

16. Sean (X, Σ_1, μ) un espacio de medida finita y $f \in L^1(X, \mu)$. Sea Σ_2 una $\sigma-$'algebra de subconjuntos de X tal que $\Sigma_2 \subseteq \Sigma_1$.

   a) Si $\mu_f(B) = \int_B f d\mu$ $(B \in \Sigma_2)$, entonces μ_f define una medida con signo sobre Σ_2, absolutamente continua con respecto a μ. Deducir que existe g Σ_2-medible tal que:

$$\int_B f d\mu = \int_B g d\mu \qquad (B \in \Sigma_2).$$

   b) Si $\Sigma_2 = \{\phi, B, B^c, X\}$ para alg'un $B \in \Sigma_1$, determinar la funci'on g del inciso anterior.

17. Sea el espacio de medida $(\mathrm{R}^{\mathrm{n}}, M, \delta)$ donde M es la $\sigma-$'algebra de conjuntos medibles Lebesgue y,

$$\delta(A) = \begin{cases} 1, & 0 \in A, \\ 0, & 0 \notin A. \end{cases}$$

   a) Probar que no existe $f : \mathrm{R}^{\mathrm{n}} \to \overline{\mathrm{R}}$ medible tal que

$$\delta(A) = \int_A f(x) dx \qquad (\forall A \in M).$$

   b) Dada $f : \mathrm{R}^{\mathrm{n}} \to \mathrm{R}$ medible, hallar todas las funciones medibles $g : \mathrm{R}^{\mathrm{n}} \to \mathrm{R}$ tales que $f = g$ a. e. con respecto a δ.

   c) Dada $f : \mathrm{R}^{\mathrm{n}} \to \mathrm{R}$ medible, hallar $\int_{\mathrm{R}^{\mathrm{n}}} f d\delta$.

18. Sean μ y ν dos medidas sobre el espacio de medida (X, Σ). Si para todo $\epsilon > 0$, existen $A_\epsilon \in \Sigma$ y $B_\epsilon \in \Sigma$ tales que:

$$A_\epsilon \cap B_\epsilon = \phi, \; A_\epsilon \cup B_\epsilon = X, \; \mu(A_\epsilon) < \epsilon \; \text{ y } \; \nu(B_\epsilon) < \epsilon;$$

entonces existen $A \in \Sigma$ y $B \in \Sigma$ tales que:

$$A \cap B = \phi, \; A \cup B = X, \; \mu(A) = 0 \; \text{ y } \; \nu(B) = 0.$$

19. *a*) Sea μ una medida de Borel finita sobre R. Definimos $f_\mu(x) = \mu((-\infty, x]) \;\; -\infty < x < +\infty$.

    Muestre que f_μ es mon'otona creciente, $\mu((a,b]) = f_\mu(b) - f_\mu(a)$, f_μ es continua por la derecha y $\lim_{x \to -\infty} f_\mu(x) = 0$

    b) Sea $f : R \to R$ creciente.

    Muestre que Λ_f es finita $\iff$ f es acotada.

    c) Sea f creciente, acotada y continua por la derecha. Sea $\mu = \Lambda_f$ y sea $\overline{f} = f_\mu$ la definida en (a).

    Muestre que f y $\overline{f}$ difieren en una constante, luego si hacemos la suposici'on adicional que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, entonces $f = \overline{f}$.

    d) Si identificamos dos funciones de R que difieren en una constante, muestre que hay una correspondecia biun'ivoca entre las medidas de borel finitas de la recta y la clase de las funciones acotadas crecientes y continuas por la derecha.

20. Sea $f : R \to R$ creciente y continua por la derecha.

    a) Mostrar que

    $$\Lambda_f \ll \mathcal{L}^1 \iff f \in AC([a,b]) \; \forall a < b \in R$$

    b) Si $\Lambda_f \ll \mathcal{L}^1$, entonces $\frac{\mathrm{d}\Lambda_f}{\mathrm{d}\mathcal{L}^1} = f'$

    (aqu'i $\mathcal{L}^1$ representa la medida de Lebesgue 1-dimensional).

21. Sea $A \subset R^n$ y notamos con $\mathcal{H}_\alpha$ la medida de Haussdorf α-dimensional. Probar:

    a) $\mathcal{H}^\alpha(x + E) = \mathcal{H}^\alpha(E) \; \forall E$ medible, $\forall x \in R^n$.

    $\mathcal{H}^\alpha(cE) = c^\alpha \mathcal{H}^\alpha(E) \; \forall E$ medible, $\forall c > 0$.

    b) Muestre que si $\mathcal{H}^\alpha(E) < \infty$, entonces $\mathcal{H}^\beta(E) = 0 \; \forall \beta > \alpha$

    c) Muestre que si $0 < \mathcal{H}^\alpha(E) \leq \infty$, entonces $\mathcal{H}^\beta(E) = \infty \; \forall \beta < \alpha$

22. Definici'on: definimos *dimensión* de E como

    $$dim(E) = \sup\{\alpha : \mathcal{H}^\alpha(E) = \infty\} = \inf\{\alpha : \mathcal{H}^\alpha(E) = 0\}$$

    Probar:

a) $\mathcal{H}^\alpha(E) = 0 \ \forall \alpha > dim(E)$

b) Si $dim(E_k) = d \ \forall k \in N$, entonces $dim(\cup E_k) = d$
Concluir que si E es numerable, entonces $dim(E) = 0$.

c) Sea $f : R^n \to R^n$ una aplicaci'on bi-Lipschitz, i.e. $\exists c, C > 0$ tal que

$$c|x-y| \leq |f(x) - f(y)| < C|x-y|$$

Entonces $dim(E) = dim(f(E))$.

23. Probar que:

a) En R, $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}^1$

b) En R^n, existen constantes $a, b > 0$ tal que

$$a\mathcal{L}^n \leq \mathcal{H}^n \leq b\mathcal{L}^n$$

(Se puede probar (aunque es m'as complicado) que existe c_n tal que $\mathcal{L}^n = c_n\mathcal{H}^n$)

c) $dim(R^n) = n$. Concluir que si $E \subset R^n$, entonces $dim(E) \leq n$

24. Sea (X, d) un espacio m'etrico, y $f : [0,1] \to X$ una curva continua.
Definimos la *longitud de arco* de f como

$$Lf = \sup \sum_{i=1}^{n} d(f(x_{i-1}), f(x_i))$$

$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$.
Si $Lf < \infty$ se dice que la curva es *rectificable.*
Sea $\mathcal{C} = f([0,1])$. Probar:

a) $Lf \geq \mathcal{H}^1(\mathcal{C})$

b) Si f es inyectiva, entonces $Lf = \mathcal{H}^1(\mathcal{C})$.

25. Sea $E \subset R^n$, tal que existe $0 < \alpha < 1,\ 0 < \mathcal{H}^\alpha(E) < \infty$. Probar que entonces E es totalmente disconexo (i.e. las componentes conexas de E son los puntos).