13 de Diciembre de 2002

ANALISIS REAL

SEGUNDO PARCIAL

(1) Sea $1 \leq p \leq r \leq q \leq +\infty$ probar que $L^p \cap L^q \subset L^r \subset L^p + L^q$ donde

$$L^p + L^q := \{f + g : \ f \in L^p \text{ y } g \in L^s\}.$$

(2) Sea $f \in L^p(\mathcal{R}^n)$, g continua y de soporte compacto. Probar:

(a) Si $p = 1$ o $p = \infty$ $f * g$ es continua.

(b) Si $1 < p < \infty \Rightarrow f * g$ es continua.

(3) Sea $(f_n)_{n \geq 1}$ tal que existe $M > 0$ con $\|f_n\|_{L^p} \leq M$ y

$$\int_E f_n \to 0, \qquad \forall E, \quad |E| < +\infty.$$

Entonces

$$\int f_n g \to 0, \qquad \forall g \in L^{p'}, 1 < p < +\infty,$$

(p' denota el conjugado de p).

(4) Sea $E \subset \mathrm{R}$ con $|E| < +\infty$ y $f : E \to R_{>0}$. Probar que:

(a) si f es medible entonces está definida $\int_E f \ln(f)$,

(b) si f pertenece a $L^2(E)$ entonces $f \ln(f)$ pertenece a $L^1(E)$.

(5) Sea $Z \subset R$ con $|Z| = 0$ y sea $h : R \to R$ continua.

Probar que $E = \{(x, y); x - h(y) \in Z\}$ es medible y calcular su medida.