Une suite spectrale pour les groupes d'homotopie des espaces d'applications équivariantes

Etienne Fieux* Andrea Solotar

Résumé

Pour un groupe discret G, nous définissons la notion de G-Π-algèbre dont le modèle est donné par le groupe gradué $(\pi_n(K))_{n\geq 1}$ correspondant à un espace topologique pointé K sur lequel G opère. Cette notion est une extension naturelle de la notion de Π-algèbre ([8]) et nous l'utilisons pour construire une suite spectrale reliée à la Π-algèbre $\Pi\mathrm{map}^G_{\mathrm{pt}}(X,Y)$ associée à l'espace des applications continues pointées et équivariantes entre deux G-CW-complexes pointés X et Y. En particulier, cette suite spectrale converge vers $\pi_*\mathrm{map}^G_{\mathrm{pt}}(X,Y)$ lorsque X est G-libre et Y n'a qu'un nombre fini de groupes d'homotopie non nuls. Un exemple est développé à partir du revêtement universel de BG.

Abstract

For a discrete group G, we define the notion of G-Π-algebra whose model is given by the graded group $(\pi_n(K))_{n\geq 1}$ corresponding to a topological space K on which G acts. This notion is a natural extension of the notion of Π-algebra ([8]) and we use it to construct a spectral sequence relied to the Π-algebra $\Pi\mathrm{map}^G_{\mathrm{pt}}(X,Y)$, associated to the space of equivariant pointed continuous applications between two pointed G-CW-complexes X and Y. In particular, this spectral sequence converges to $\pi_*\mathrm{map}^G_{\mathrm{pt}}(X,Y)$ when X is G-free and Y has

*L'auteur remercie le Département de Mathématiques de l'Université Paris-Sud pour le séjour qui a permis ce travail en collaboration.

Received by the editors June 1997.

Communicated by Y. Félix.

1991 *Mathematics Subject Classification :* (Primary) 55P91, 55S37, 55T99, 18G10 (Secondary) 55Q05, 55T05.

Key words and phrases : homotopie équivariante, espaces fonctionnels, Π-algèbres, G-espaces, construction de Kan.

only a finite number of non vanishing homotopy groups. We give an example obtained from the universal covering of BG.

Introduction

Soit G un groupe discret et soient X et Y, deux G-CW-complexes pointés ([7]). L'objet de cet article est l'étude des groupes d'homotopie de $\mathrm{map}_{\mathrm{pt}}^G(X, Y)$, l'ensemble des applications continues, respectant le pointage et équivariantes de X dans Y. De nombreux résultats sur ce sujet (en particulier, [11],[15] ; voir [12] pour un "panorama") établissent des résultats concernant les groupes d'homotopie stables $\{X, Y\}^G = \underrightarrow{lim}_{k} [S^k X, S^k Y]^G$; cela revient à utiliser des techniques de suites spectrales de type Adams et à considérer des spectres ou des espaces dont les groupes d'homotopie sont des $\pi_*^s(S^0)$-modules, en notant $\pi_*^s(S^0)$ l'anneau gradué des groupes d'homotopie stable des sphères.

Dans cet article, nous nous plaçons dans le cas instable en adoptant l'approche selon les Π-algèbres ([8],[9]) qui tient compte des opérations homotopiques primaires (données par les produits de Whitehead et la composition avec des applications continues entre les sphères) et nous décrivons une suite spectrale (de type Bousfield-Kan) reliée à la Π-algèbre $\Pi\mathrm{map}_{\mathrm{pt}}^G(X, Y)$, c'est-à-dire, au groupe gradué $(\pi_n \mathrm{map}_{\mathrm{pt}}^G(X, Y))_{n\geq 1}$ considéré avec l'ensemble des opérations homotopiques qui agissent sur lui. Le résultat essentiel s'exprime ainsi :

Théorème 4.2.2. : Soient X et Y deux G-CW-complexes pointés. On suppose de plus que Y n'a qu'un nombre fini de groupes d'homotopie non nuls et que X est G-libre.

Il existe une suite spectrale dont les termes E_2 sont donnés, pour $q \geq p \geq 1$ et $q \geq 1$ si $p = 0$, par :

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Dhom}_G^{p,q}(\pi_*(X), \pi_*(Y))$$

et qui converge vers $\pi_*(\mathrm{map}_{\mathrm{pt}}^G(X, Y))$.

Pour cela, nous introduisons la notion de G-Π-algèbre. C'est une extension naturelle de la notion de Π-algèbre qui a été introduite par Dwyer et Kan ([8],[9]) et qui est calquée sur le modèle fourni par l'ensemble gradué des groupes d'homotopie (de dimension supérieure ou égale à 1) d'un espace topologique, que l'on notera $(\pi_i(K))_{i\geq 1}$ (ou plus brièvement, ΠK) pour tout espace topologique pointé K. Dans [10], cette notion est utilisée pour construire, dans la catégorie des Π-algèbres, une suite spectrale qui converge vers les groupes d'homotopie $\Pi\mathrm{map}_{\mathrm{pt}}(X, Y)$ et qui est un cas particulier (pour G réduit à l'élément neutre) de celle présentée dans cet article.

Nous commençons par des rappels sur les Π-algèbres (section 1) avant de définir la notion de G-Π-algèbre (section 2), c'est-à-dire, de Π-algèbre sur laquelle le groupe G agit de manière compatible avec les opérations homotopiques. Pour deux G-espaces X et Y, il existe deux G-Π-algèbres "naturelles", $\Pi\mathrm{map}_{\mathrm{pt}}(X, Y)$ et $\mathrm{hom}(\Pi X, \Pi Y)$. Un morphisme les relie et donne lieu à un isomorphisme de Π-algèbres (Proposition 2.2.2.) :

$$h^G \ :\longrightarrow \mathrm{hom}^G(\Pi X, \Pi Y)$$

lorsque ΠX est une G-Π-algèbre libre. Cet isomorphisme permettra d'identifier les termes $E_2^{*,*}$ de la suite spectrale comme des foncteurs dérivés et on utilise à cette fin la notion de cotriple (section 3 et appendice, pour des résultats plus généraux sur cette notion) pour définir une résolution simpliciale libre (dans la catégorie des G-Π-algèbres) de ΠX. Nous énonçons ensuite la suite spectrale ainsi obtenue (section 4).

La fin de l'article donne une application de cette suite spectrale. Un cas naturellement intéressant est celui de $X = EG$, le revêtement universel du classifiant BG de G. Le G-espace EG n'étant pas G-libre (cf. section 4.1), on considèrera alors, en notant $^+$ l'adjonction d'un point-base laissé fixe par l'action de G, la cofibre de l'inclusion $G^+ \hookrightarrow EG^+$ (que l'on notera $\widetilde{EG}$) qui est un $K(L(G^*), 1)$ en désignant par $L(G^*)$ le groupe libre engendré par l'ensemble formé des éléments de G, à l'exclusion de l'élément neutre e. Comme il arrive souvent dans le calcul des groupes d'homologie, les résolutions aussi générales que celles fournies par la méthode du cotriple peuvent s'avérer difficiles à exploiter et il est alors souhaitable de travailler avec des résolutions plus explicites. Pour cette raison, on donne (section 5) une construction d'une résolution de la Π-algèbre ΠBG (lemme 5.2) en utilisant la construction de Kan ([5],[13]) et l'on montre que cela permet de définir une résolution de la G-Π-algèbre $\Pi\widetilde{EG}$ (lemme 5.3). Nous détaillons enfin la suite spectrale obtenue quand Y est un espace d'Eilenberg-Mac-Lane $K(M, n)$ qui est un G-espace lorsqu'on considère un $\mathbf{Z}[G]$-module M (section 6). La suite spectrale est alors dégénérée. Le terme $E_2^{0,n-1}$ est isomorphe au groupe $Der(G, M)$ des dérivations de G dans M. Les autres termes sont donnés par la comologie de G à coefficients dans M et permettent de retrouver des résultats connus sur l'homotopie de $\mathrm{map}^G(EG, K(M, n))$ vu comme l'espace des sections de la fibration de Borel de base BG et d'espace total $EG \times_G K(M, n)$ ([14]).

1 Les Π-algèbres

1.1 Définition : Une Π-algèbre P est un foncteur contravariant :

$$\Pi \longrightarrow Set_{\mathrm{pt}}$$

qui envoie les coproduits sur les produits, où :

1) Π est la catégorie dont les objets sont les CW-complexes qui ont le type d'homotopie d'un bouquet fini de sphères de dimension ≥ 1 et dont les morphismes sont les classes d'homotopie pointées. Le coproduit de deux objets U et V de Π est le bouquet $U \vee V$.

2) Set_{pt} est la catégorie dont les objets sont les ensembles pointés et dont les morphismes sont les applications pointées.

Si P_1 et P_2 sont deux Π-algèbres, un morphisme $P_1 \to P_2$ est une transformation naturelle. On note $\mathrm{Hom}(P_1, P_2)$ l'ensemble de ces morphismes et $\Pi - al$ la catégorie des Π-algèbres.

1.2 Remarques : (i) Les sphères fournissent une classe de modèles pour $\Pi - al$ et une Π -algèbre P est déterminée, à isomorphisme près, par ses valeurs sur les sphères ; on notera $P_n = P(S^n)$ et P est ainsi (≥ 1)-graduée. De la même façon, pour définir un morphisme de P dans P', on pourra se contenter de donner les applications pointées $P_k = P(S^k) \to P'_k = P'(S^k)$ pour tout entier $k \geq 1$.

(ii) La catégorie Π réunit l'ensemble des opérations homotopiques puisque les opérations homotopiques à k variables pour un espace topologique pointé X :

$$\pi_{n_1}(X) \times \pi_{n_2}(X) \times ... \times \pi_{n_k}(X) \longrightarrow \pi_p(X)$$

sont en bijection avec les éléments de $\pi_p(S^{n_1} \vee S^{n_2} \vee ... \vee S^{n_k})$. D'après un théorème de Hilton ([19]), ces groupes d'homotopie s'expriment comme addition, composition et produit de Whitehead de classes d'homotopie des groupes d'homotopie des sphères. On peut donc présenter une Π-algèbre P comme une famille de groupes $(P_n)_{n\geq 1}$ avec P_n abélien si $n > 1$, muni de deux types d'opérations :

$[\ ,\ ]$: $P_p \otimes P_q \to P_{p+q-1}$ donnés par les "produits de Whitehead".
$- \circ \alpha$: $P_p \to P_r$ pour $\alpha \in \pi_r(S^p)$, $r > p > 1$ (les opérations de composition induites par les groupes d'homotopie des sphères).

Les produits de Whitehead comprennent une action de P_1 sur P_n , $n \geq 1$. Si $x \in P_1$ et $y \in P_n$, on notera $\tau_x(y)$ le résultat de l'action de x sur y. On a : $[x, y] = \tau_x(y) - y$, si $n \geq 2$ et $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$, si $y \in P_1$. En particulier, cette action est trivale si $[x, y] = 0$ pour tout x de P_1 et pour tout y.

1.3 Exemples : (i) ΠX. Soit X un espace topologique pointé ; il définit la Π-algèbre :

$$\begin{array}{ccc} \Pi & \longrightarrow & Set_{\text{pt}} \\ U & \to & [U, X]_{\text{pt}} \end{array}$$

où $[-, -]_{\text{pt}}$ désigne les classes d'homotopie d'applications pointées. On notera $\Pi_* X$ ou simplement ΠX cette Π-algèbre et bien sûr, $\Pi_n X = \pi_n(X)$ est pointé par la classe de l'application constante.

(ii) $\hom(P, P')$. Soient $P, P' \in \text{OB}(\Pi - al\,)$. Notons d'abord que si $U, V \in \text{OB}(\Pi)$, le smash-produit $U \wedge V = \frac{U \times V}{(U \times *) \vee (* \times V)}$ est aussi un objet de Π et on a la propriété de distributivité : $U \wedge (V_1 \vee V_2) = (U \wedge V_1) \vee (U \wedge V_2)$. Ceci permet de définir, pour tout U de $\text{OB}(\Pi)$, un foncteur :

$$\begin{array}{ccc} \Pi - al & \longrightarrow & \Pi - al \\ P & \to & P^U \end{array}$$

par $P^U(V) = P(U \wedge V)$, pour tout V de $\text{OB}(\Pi)$. Ainsi, à tout couple (P, P') de Π-algèbres, on associe la Π -algèbre suivante :

$$\hom(P, P') \ : \ \begin{array}{l} \Pi \longrightarrow Set_{\text{pt}} \\ U \to \text{Hom}(P, P'^U) \end{array}$$

On a donc : $\hom(P, P')_n = \text{Hom}(P, P'^{S^n})$ et $\hom(P, P')$ est pointé par le morphisme trivial (P_n est envoyé sur le point base de P'_n) de $\text{Hom}(P, P')$.

Si on veut pointer $\hom(P, P')$ en un autre élément ϕ de $\text{Hom}(P, P')$, les éléments de $\hom(P, P')_n$ seront les éléments a de $\text{Hom}(P, P'^{(S^n)^+})$ tels que, pour tout U de Π, le morphisme composé :

$$P(U) \xrightarrow{a} P'(U \wedge (S^n)^+) \xrightarrow{i^*} P'(U)$$

(où i est l'inclusion $U = U \wedge \{\text{point}\}^+ \to U \wedge (S^n)^+$) soit égal à ϕ. On notera $\hom_\phi(P, P')$ quand le point base est différent du morphisme trivial.

(iii) **Π-algèbre libre**. Ce sont les Π-algèbres qui sont isomorphes à ΠL où L est un bouquet de sphères. En fait, une Π-algèbre libre est entièrement déterminée par un ensemble gradué pointé $(K_n)_{n\geq 1}$. Un tel ensemble détermine la Π -algèbre libre $\mathcal{F}(K) = \Pi(\vee_{n\geq 1} \vee_{t\in K_n - *} S_t^n)$, où $*$ dénote le pointage de K_n, $n \geq 1$. Cette Π-algèbre est engendrée par les $x_{n,t} \in \pi_n(S^n) \subset \pi_n(\vee_{k\geq 1} \vee_{t\in K_k - \{*\}} S_t^k)$ induits par les inclusions naturelles.

2 Les G-Π-algèbres

2.1 Opérations homotopiques et G-action

2.1.1 Soit G un groupe discret. Dorénavant on considère des G-espaces (i.e., des espaces topologiques pointés sur lesquels G opère en laissant fixe le point base). Soit X un G-espace. Pour chaque $k \geq 2$, $\pi_k(X)$ est un G-module et $\pi_1(X)$, un groupe sur lequel G agit et la G-structure des groupes d'homotopie est compatible avec les opérations homotopiques dans le sens suivant : $\forall\ p, q \geq 1,\ \forall\ g \in G,\ \forall\ (\alpha, \beta) \in \pi_p(X) \times \pi_q(X),\ \forall\ \upsilon \in \pi_k(S^p)$:

$$g\,[\alpha, \beta] = [g\alpha, g\beta] \qquad \text{et} \qquad g(\alpha \circ \upsilon) = (g\alpha) \circ \upsilon$$

Définition : Une G-Π-algèbre est une Π-algèbre sur laquelle G agit (par des opérations de degré 0) de manière compatible avec les produits de Whitehead et les opérations de composition.

Si X est un G-espace, ΠX est donc une G-Π-algèbre.

L'ensemble des G-Π-algèbres forme les objets de la catégorie G-Π-al dont les flèches sont les morphismes de Π-algèbres qui respectent la G-structure.

En revenant à la définition initiale des Π-algèbres et en appelant G-Set_{pt} la catégorie des G-ensembles pointés (c'est-à-dire, des ensembles pointés sur lesquels G agit en laissant fixe le pointage), on peut présenter une G-Π-algèbre comme un foncteur contravariant :

$$\Pi \quad \longrightarrow \quad G{-}Set_{\mathrm{pt}}$$

qui envoie les coproduits sur les produits.

2.1.2 Si P_1 et P_2 sont des G-Π-algèbres, la Π-algèbre $\hom(P_1, P_2)$ hérite d'une action naturelle de G et est aussi une G-Π-algèbre.

Pour deux G-Π-algèbres P_1 et P_2, on notera $\mathrm{Hom}^G(P_1, P_2)$, l'ensemble des morphismes de source P_1 et de but P_2, dans la catégorie des G-Π-algèbres et, de manière analogue au cas non équivariant, on définit $\hom^G(P_1, P_2)$ qui est une Π-algèbre. Par ailleurs, si P est une G-Π-algèbre, P^G est la Π-algèbre formée des éléments de P invariants pour l'action de G et on a l'égalité : $\hom^G(P_1, P_2) = (\hom(P_1, P_2))^G$.

2.1.3 Un bouquet de sphères du type $\vee_{g\in G} \vee_{i\in I} S_g^{n_i} = \vee_{(i,g)\in(I^+\wedge G^+)-\{*\}} S_g^{n_i}$ (c'est-à-dire, donné par un ensemble gradué d'indices de la forme $I^+ \wedge G^+$ où I est un ensemble gradué d'indices, G est pris comme ensemble gradué concentré en degré 0 et G^+ désigne G auquel on a ajouté un point base) sera appelé *G-bouquet de sphères*.

Définition : Une G-Π-algèbre A est dite libre s'il existe un G-bouquet de sphères $\vee_{g\in G} \vee_{i\in I} S_g^{n_i}$, $n_i \geq 1$ tel que A soit isomorphe (en tant que $G-\Pi-$algèbre) à $\pi_*(\vee_{g\in G} \vee_{i\in I} S_g^{n_i})$.

La G-structure sur $\pi_*(\vee_{g\in G}\vee_{i\in I} S_g^{n_i})$ est induite par l'action de G sur les sphères : $g'.S_g^{n_i} = S_{g'g}^{n_i}$ pour tous g, g' de G et cette Π -algèbre a $\sharp G$ générateurs en degré n_i pour chaque générateur $x_{n_i} \in \pi_{n_i}(S^{n_i}) = \pi_{n_i}(S_1^{n_i}) \subset \pi_{n_i}(\vee_{g\in G} \vee_{i\in I} S_g^{n_i})$, 1 désignant l'élément neutre du groupe.

Le foncteur "oubli" $\mathcal{O}$:

$$G{-}\Pi{-}\mathrm{al} \longrightarrow EnsGrad_{\mathrm{pt}}$$

admet pour adjoint à gauche le foncteur libre $\mathcal{L}$:

$$EnsGrad_{\mathrm{pt}} \longrightarrow G{-}\Pi{-}\mathrm{al}$$

qui, à l'ensemble gradué pointé $E = (E_n)_{n\geq 1}$ (avec $\{*\}$ comme pointage en chaque degré) associe la G-Π-algèbre :

$$\pi_*(\vee_{n\geq 1} \vee_{l\in E_n-\{*\}} \vee_{g\in G} S^n_{g,l})$$

Si $L = \mathcal{L}(E)$, on dira encore que L est la G-Π-algèbre libre engendrée par E.

2.2 Le morphisme $h^G \ : \ \Pi\mathrm{map}^G_{\mathrm{pt}}(X,Y) \longrightarrow \hom^G(\Pi X, \Pi Y)$

2.2.1 Soient X et Y deux G-CW-complexes pointés. $\Pi\mathrm{map}_{\mathrm{pt}}(X,Y)$ est l'espace topologique formé des applications pointées continues de X dans Y (pour la topologie compacte-ouverte). Il est pointé en l'application constante. C'est un G-espace pour l'action : si $f : X \to Y$ et $g \in G$, $g.f : X \to Y$ est donnée par $(g.f)(x) = gf(g^{-1}x)$, i. e. par la composition :

$$X \xrightarrow{g^{-1}} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Y$$

Par la suite, cette action sera plus brièvement notée gf. On a ainsi deux G-Π-algèbres, $\Pi\mathrm{map}_{\mathrm{pt}}(X,Y)$ et $\hom(\Pi X, \Pi Y)$ (pointé en π_*(application constante)) qui sont reliées par le morphisme de G-Π-algèbres :

$$h \ : \ \Pi\mathrm{map}_{\mathrm{pt}}(X,Y) \longrightarrow \hom(\Pi X, \Pi Y)$$

donné par la famille de transformations naturelles (h_n) :

$$h_n \ : \ \Pi_n\mathrm{map}_{\mathrm{pt}}(X,Y) \longrightarrow \hom(\Pi X, \Pi Y)_n$$

définies de la manière suivante : soit $[s_n] \in \Pi_n\mathrm{map}_{\mathrm{pt}}(X,Y) = \pi_n(\mathrm{map}_{\mathrm{pt}}(X,Y))$. Via l'isomorphisme : $[S^n, \mathrm{map}_{\mathrm{pt}}(X,Y)] \simeq [S^n \wedge X, Y]$, soit $\overline{s_n} \ : \ S^n \wedge X \to Y$

un représentant de s_n ; on lui associe dans $\hom(\Pi X, \Pi Y)_n = \mathrm{Hom}(\Pi X, \Pi Y^{S^n})$ la transformation $h(s_n)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl} h(s_n)(U) & : & \Pi X(U) = [U, X]_{\mathrm{pt}} \longrightarrow \Pi Y^{S^n}(U) = \Pi Y(S^n \wedge U) = [S^n \wedge U, Y]_{\mathrm{pt}} \\ & & [f] \in [U, X]_{\mathrm{pt}} \longrightarrow [h(s_n)(U)(f) : S^n \wedge U \overset{1_{S^n} \wedge f}{\longrightarrow} S^n \wedge X \overset{\overline{s_n}}{\to} Y]_{\mathrm{pt}} \end{array}$$

où U est un objet quelconque de la catégorie Π. On vérifie facilement que h respecte la G-structure et que, si l'on restreint h aux classes d'homotopie d'applications équivariantes, on obtient un morphisme :

$$h^G = h_{|\Pi \mathrm{map}^G_{\mathrm{pt}}(X,Y)} : \Pi \mathrm{map}^G_{\mathrm{pt}}(X, Y) \longrightarrow \hom^G(\Pi X, \Pi Y)$$

2.2.2 Proposition : h^G est un isomorphisme si ΠX est une G-Π-algèbre libre.

preuve : Supposons que $X = \vee_{g \in G} S^i_g$, $i \geq 1$, soit $\varphi_n \in \hom^G(\Pi(\vee_{g\in G} S^i_g), \Pi Y)_n$, $n \geq 1$ et soit $[f]$ la classe d'homotopie de $S^i \overset{\mathrm{id}}{\to} S^i_1 \subset \vee_{g \in G} S^i_g$, où 1 est l'élément neutre de G. $\varphi_n([f])$ est la classe d'homotopie d'une application $S^n \wedge S^i \to Y$ que l'on étend de manière naturelle (via l'inclusion $S^n \wedge S^i_1 \subset S^n \wedge (\vee_{g\in G} S^i_g)$) en une application équivariante $S^n \wedge (\vee_{g \in G} S^i_g) \to Y$ dont la classe d'homotopie fournit un élément de $\Pi_n \mathrm{map}^G_{\mathrm{pt}}(\vee_{g\in G} S^i_g, Y)$. Cette construction fournit un inverse de h^G et s'étend à tout G-bouquet de sphères.

3 La résolution simpliciale libre de ΠX

3.1 Le cotriple $(\mathcal{V}^G, \eta^G, \mu^G)$

Soit X est un G-CW-complexe pointé et soit $\mathcal{V}^G(X)$ le G-CW-complexe donné par le diagramme cocartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} \bigvee_{g\in G} \bigvee_{n \geq 1} \bigvee_{h \in \mathrm{map}(D^{n+1}, X)} S^n_{h|S^n, g} & \longrightarrow & \bigvee_{g \in G} \bigvee_{n\geq 1} \bigvee_{h \in \mathrm{map}(D^{n+1}, X)} D^{n+1}_{h,g} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigvee_{g\in G} \bigvee_{n\geq 1} \bigvee_{f \in \mathrm{map}(S^n, X)} S^n_{f,g} & \longrightarrow & \mathcal{V}^G(X) \end{array}$$

Pour tout n, les disques D^n et les sphères S^n sont des G-espaces triviaux mais leur différents exemplaires sont permutés entre eux de manière naturelle ; autrement dit, $\mathcal{V}^G(X)$ est un G-espace via l'action : $g'.D^n_{h,g} = D^n_{g'h, g'g}$ et $g'.S^n_{f,g} = S^n_{g'f, g'g}$, $\forall g, g' \in G$, $\forall n \geq 1$ et pour toutes les applications continues et pointées $f : S^n \to X$ et $h : D^n \to X$. On définit aussi les tranformations :

$$\eta^G : \mathcal{V}^G \longrightarrow \mathrm{I} \quad \text{et} \quad \mu^G : \mathcal{V}^G \longrightarrow \mathcal{V}^G \mathcal{V}^G$$

Pour tout G-CW-complexe X, η^G_X envoie la sphère $S^n_{f,g}$ (resp. la cellule $D^n_{h,g}$) sur $f(S^n) \subset X$ (resp. sur $h(D^n) \subset X$) et μ^G_X envoie la sphère $S^n_{f,g}$ (resp. la cellule $D^n_{h,g}$) sur la sphère $S^n_{i_{f,g}, g}$ (resp. sur la cellule $D^n_{i_{h,g}, g}$) indexée par l'application :

$i_{f,g} : S^n \xrightarrow{id} S^n_{f,g} \subset \mathcal{V}^G(X)$ (resp. indexée par l'application : $i_{h,g} : D^n \xrightarrow{id} D^n_{h,g} \subset \mathcal{V}^G(X)$). Ces applications sont équivariantes. De plus, elles vérifient les égalités :

$$(\mathcal{V}^G\eta^G)\mu^G = 1 = (\eta^G\mathcal{V}^G)\mu^G \quad \text{et} \quad (\mathcal{V}^G\mu^G)\mu^G = (\mu^G\mathcal{V}^G)\mu^G$$

et, par conséquent, munissent le triplet $(\mathcal{V}^G, \eta^G, \mu^G)$ d'une structure de cotriple (cf appendice A.2 ; [1]).

3.2 La G-Π-algèbre simpliciale $\Pi(V^G_\bullet(X))$

De façon classique (cf. appendice A.1, [1]), si on pose $V^G_k(X) = \mathcal{V}^G(V^G_{k-1}(X))$ pour $k \geq 1$ et $V^G_0(X) = \mathcal{V}^G(X)$, le cotriple $(\mathcal{V}^G, \eta^G, \mu^G)$ munit $V^G_\bullet(X) = (V^G_k(X))_{k\geq 0}$ d'une structure de G-CW-complexe simplicial.

Pour chaque $k \geq 0$, $\Pi(V^G_k(X))$ est la Π-algèbre constituée des groupes d'homotopie $\pi_i(V^G_k(X))_{i\geq 1}$ et $\Pi(V^G_\bullet(X))$=$(\Pi(V^G_k(X))_{k\geq 0}$ est une Π-algèbre simpliciale où la structure simpliciale est induite par la structure simpliciale de $V^G_\bullet(X)$. De plus, G opère sur chaque $\pi_i(V^G_k(X))$, $i \geq 1$ et les opérateurs "face" et "dégénérescence" sont eux-mêmes des G-morphismes : on a donc une G-Π-algèbre simpliciale.

De façon analogue au cas non équivariant ([18]), on obtient le résultat suivant (dont la preuve est donnée dans l'appendice A.3) :

3.2.1 Proposition : Soit $p \geq 1$.
1) $\forall q \geq 1$, $\pi_q\pi_p(V^G_\bullet(X)) = 0$.
2) L'augmentation η^G : $V^G_0(X) = \mathcal{V}^G(X) \to X$ induit des isomorphismes (de groupes munis d'une action de G) : $\pi_0\pi_p(V^G_\bullet(X)) \simeq \pi_p(X)$

3.2.2 Définition : Une résolution simpliciale libre d'une $G-\Pi-$algèbre P est une G-Π-algèbre simpliciale $F_\bullet$ augmentée par P qui vérifie les conditions :

1) Il existe des G-sous-ensembles gradués $K_n = \{K_{n,m}\}_{m\geq 1} \subset F_n$ tels que, pour tout $n \geq 0$, F_n est la $G - \Pi$-algèbre libre graduée par K_n.

2) $s_j k_n \in K_{n+1}$, $0 \leq j \leq n$, $k_n \in K_n$.

3) $\pi_n F_\bullet = 0$, $n \geq 1$.

4) L'augmentation induit un isomorphime : $\pi_0 F_\bullet \longrightarrow P$.

Les conditions 1) et 2) sont vérifiées par $V^G_\bullet(X)$. La preuve est une simple reformulation en termes de G-bouquets de sphères d'un résultat de [18] (proposition 2.5). En fait, chaque $V^G_k(X)$ a le type d'homotopie d'un G bouquet de sphères indexé soit par les applications $f : S^n \to X$, $n \geq 1$ non homotopiquement triviales, soit (en un nombre d'exemplaires plus important pour chacun de ces indices) par les applications $f : S^n \to X$, $n \geq 1$ homotopiquement triviales. Par ailleurs, les conditions 3) et 4) sont vérifiées pour $V^G_\bullet(X)$ d'après la proposition 3.2.1. Par conséquent :

3.2.3 Proposition : $\Pi(V^G_\bullet(X))$ est une résolution simpliciale libre de ΠX dans la catégorie des G-Π-algèbres.

4 Une suite spectrale dans le cas équivariant

4.1 On appellera $\mathrm{Dhom}_G(-,P)$ le foncteur dérivé de :

$$\begin{array}{ccc} G{-}\Pi{-}\mathrm{al} & \longrightarrow & \Pi{-}\mathrm{al} \\ M & \to & \hom^G(M,P) \end{array}$$

On a donc $\mathrm{Dhom}^i_G(-,P) = \pi_i(\hom^G(F_\bullet, P))$ où $F_\bullet$ est une résolution simpliciale libre de M dans $G-\Pi{-}\mathrm{al}$. Rappelons qu'un G-espace pointé X est dit G-libre ([12]) si $X^H = \{*\}$ pour tout sous-groupe H de G, $*$ dénotant le point base et X^H l'ensemble des éléments de X laissés invariants par H.

4.2 Théorème : Soient X et Y deux G-CW-complexes pointés. On suppose de plus que Y n'a qu'un nombre fini de groupes d'homotopie non nuls.
1) Il existe une suite spectrale dont les termes E_2 sont donnés, pour $q \geq p \geq 1$ et $q \geq 1$ si $p = 0$, par :

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Dhom}_G^{p,q}(\pi_*(X), \pi_*(Y))$$

et qui converge vers $\pi_*(\mathrm{map}^G_{\mathrm{pt}}(RV^G_\bullet X, Y))$ où $RV^G_\bullet X$ est la réalisation géométrique de $V^G_\bullet X$.
2) Lorsque X est G-libre, cette suite spectrale converge vers $\pi_*(\mathrm{map}^G_{\mathrm{pt}}(X,Y))$.

preuve : 1) Il s'agit de la suite spectrale définie dans [3] (X.6.1) appliquée à l'espace cosimplicial $\mathrm{map}^G_{\mathrm{pt}}(V^G_\bullet(X), Y)$. Rappelons que cette suite spectrale, définie pour un espace cosimplicial fibrant Z, part en $E_2^{s,t} = \pi^s\pi_t Z$ et converge, sous certaines conditions, vers $\pi_*(\mathrm{Tot}\ Z)$. Ici, les conditions de convergence sont remplies si l'on suppose que Y n'a qu'un nombre fini de groupes d'homotopie non nuls et $\pi_*(\mathrm{Tot}(\mathrm{map}^G_{\mathrm{pt}}(V^G_\bullet(X),Y)))$ est isomorphe à $\pi_*(\mathrm{map}^G_{\mathrm{pt}}(RV^G_\bullet X, Y))$, comme le démontre le diagramme commutatif de limites inverses qui suit :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Tot}(\mathrm{map}^G_{\mathrm{pt}}(V^G_\bullet(X),Y)) & \to & \prod_n \mathrm{map}(\Delta^n, \mathrm{map}^G_{\mathrm{pt}}(V^G_n(X),Y)) & \rightrightarrows & \prod_{m\to n} \mathrm{map}(\Delta^n, \mathrm{map}^G_{\mathrm{pt}}(V^G_m(X),Y)) \\ & & \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq \\ \mathrm{map}^G_{\mathrm{pt}}(RV^G_\bullet(X),Y) & \to & \mathrm{map}^G_{\mathrm{pt}}(\coprod_n (\Delta^n)^+ \wedge V^G_n(X), Y) & \rightrightarrows & \mathrm{map}^G_{\mathrm{pt}}(\coprod_{m\to n}(\Delta^n)^+ \wedge V^G_m(X), Y) \end{array}$$

où $\Delta^\bullet = (\Delta^n)_{n\geq 0}$ est l'espace cosimplicial donné en codimension n par le n-simplexe standard Δ^n et sur lequel G agit trivialement. $(\Delta^n)^+$ désigne le n-simplexe auquel on a rajouté un point qui joue le rôle de point-base. L'identification des termes E_2 découle des propositions 2.2.2. et 3.2.3.

2) De façon classique, un argument de suite spectrale associée à $V^G_\bullet(X)$ pris comme ensemble bi-simplicial ([18], prop. 3.5) montre que l'augmentation η^G : $\mathcal{V}^G(X) \longrightarrow X$ induit des isomorphismes $\pi_*(RV^G_\bullet(X)) \to \pi_*(X)$. Comme $RV^G_\bullet(X)$ et X sont G-libres, on en déduit ([7], prop. II.2.7) que ces deux espaces ont même type de G-homotopie.

5 Construction d'une résolution libre

Le résultat de cette suite spectrale ne dépend pas du choix de la résolution libre et, pour mener les calculs, il est souhaitable de trouver un substitut plus explicite à la résolution simpliciale libre donnée dans la section 3. Nous donnons ici le moyen de parvenir à cela dans le cas du classifiant $BH = K(H,1)$ d'un groupe discret H. Pour un groupe discret G d'élément neutre e, si l'on considère le groupe $H = L(G^*)$ (i.e. H est le groupe libre engendré par l'ensemble $\{[g];\ g \in G\ ,\ g \neq e\}$), on obtient une résolution libre dans la catégorie des G-Π-algèbres pour la G-Π-algèbre définie par le G-espace libre $\widetilde{EG}$ (cf. introduction ou section 6.1).

Nous commençons par rappeler quelques constructions standards.

5.1 Soit BH le classifiant de H vu comme l'ensemble simplicial $(BH)_n = H^n$, $n \geq 0$. Les opérateurs simpliciaux *face* $d_i : H^n \to H^{n-1}$, $0 \leq i \leq n$, $n \geq 1$ sont :

$$\begin{aligned} d_0(h_1, h_2, ..., h_n) &= (h_2, ..., h_n) \\ d_i(h_1, h_2, ..., h_n) &= (h_1, ..., h_i h_{i+1}, ..., h_n), \quad \text{si } 0 < i < n \\ d_n(h_1, h_2, ..., h_n) &= (h_1, ..., h_{n-1}) \end{aligned}$$

avec, en particulier, $d_1(h) = d_0(h) = *$ pour $h \in H = (BH)_1$ et $(BH)_0 = \{*\}$. Les opérateurs simpliciaux *dégénérescence* $s_i : H^n \to H^{n+1}$, $n > 0$, sont :

$$s_i(h_1, h_2, ..., h_n) = (h_1, ..., h_i, 1, h_{i+1}, ..., h_n), \qquad \text{si } 0 \leq i \leq n-1$$

et $s_0(*) = 1$ sur $(BH)_0$.

A tout ensemble simplicial $K_\bullet$, la construction de Kan ([5]) associe un groupe libre simplicial $F_\bullet(K)$ tel que : $\pi_i(F(K)) = \pi_{i+1}(K)$, pour $i \geq 0$.

Par définition, lorsque $K = BH$ et pour $i \geq 0$, $F_i(BH)$ est le groupe libre engendré par les $(i+1)$-uplets $(h_0, h_1, , ..., h_i)$ avec $h_k \in H$ pour $0 \leq k \leq i$ et $h_0 \neq 1$. Les opérateurs simpliciaux $\overline{d}_p$ et $\overline{s}_p$ sont alors définis sur les générateurs (notés $[y]$ pour $y \in (BH)_{i+1}$) de $F_i(BH)$ par :

$$\begin{aligned} \overline{s}_p[y] &= [s_{p+1}y], \quad \text{si } i \geq 0 \\ \overline{d}_p[y] &= [d_{p+1}y], \quad \text{si } i \geq 1 \\ \overline{d}_0[y] &= [d_1 y][d_0 y]^{-1} \end{aligned}$$

où les s_p et d_p sont les opérateurs simpliciaux de BH.

Définition : $P_\bullet^H$ est la Π-algèbre simpliciale donnée par :

1) $(P_\bullet^H)_n = 0$, pour tout entier $n \geq 2$, n désignant la graduation de la Π-algèbre (i.e., $P_\bullet^H$ est asphérique) et

2) $(P_i^H)_1 = F_i(BH)$ où i désigne le degré simplicial.

5.2 Lemme : $P_\bullet^H$ est une résolution simpliciale libre de $\Pi(BH)$ dans la catégorie des Π-algèbres.

preuve : Comme $\Pi(BH)$ est une Π-algèbre asphérique (elle est réduite au groupe $\pi_1(BH) = \pi_1(K(H,1)) = H$) et que $P_\bullet^H$ est aussi asphérique, il suffit de noter que $(P_\bullet^H)_1$ est un groupe simplicial libre qui vérifie :

$$\begin{aligned} \pi_i((P_\bullet^H)_1) &= \pi_i(F_\bullet(BH)) = \pi_{i+1}(BH) = 0, \ \text{si } i \geq 1 \\ \pi_0((P_\bullet^H)_1) &= \pi_0(F_\bullet(BH)) = \pi_1(BH) = H \end{aligned}$$

Par ailleurs, si $F = L(T)$ est le groupe libre engendré par un ensemble T, on peut "réaliser" F en posant :

$$F = L(T) \ \simeq \ \pi_1(\bigvee_{a \in T} S^1_a)$$

Ceci montre que les $(P_i^H)_1 = F_i(BH)$ sont des Π-algèbres libres.

REMARQUE : On notera $X_T = \bigvee_{a\in T} S_a^1$ (i.e., $L(T) = \pi_1(X_T)$) et si l'on pose $\mathcal{X}_i^H = X_{S_i^H}$, les S_i^H étant déterminés par $F_i(BH) = \pi_1(X_{S_i^H})$ (ils sont concrètement donnés par la construction de Kan), on obtient un CW-complexe simplicial $\mathcal{X}_\bullet^H$ asphérique (les opérateurs faces et dégénérescences sont automatiquement donnés par ceux de $F_\bullet(BH)$) qui permet de définir la Π-algèbre simpliciale asphérique libre $P_\bullet^H$ par : $(P_i^H)_1 = \pi_1(\mathcal{X}_i^H)$.

Lorsque $H = L(G^*)$, $P_\bullet^{L(G^*)}$ hérite d'une action de G (que l'on précise dans la preuve qui suit) et on a :

5.3 Lemme : $P_\bullet^{L(G^*)}$ est une résolution simpliciale libre de $\Pi(K(L(G^*),1))$ dans la catégorie des G-Π-algèbres.

preuve : Par construction, nous avons : $(P_i^{L(G^*)})_1 = \pi_1(\mathcal{X}_i^{L(G^*)})$ (avec les notations de la remarque précédente) et, d'après le lemme 1, $P_\bullet^{L(G^*)}$ est une résolution simpliciale libre de $\Pi(K(L(G^*),1))$ dans la catégorie des Π-algèbres ; il suffit donc de montrer que les espaces $\mathcal{X}_i^{L(G^*)}$ sont des G-bouquets de sphères et que les opérateurs simpliciaux respectent la G-structure de $P_\bullet^{L(G^*)}$.

Par construction, $P_i^{L(G^*)} = F_i(BL(G^*)) = L(S_i^{L(G^*)})$ où $S_i^{L(G^*)}$, pour $i \geq 0$, est ensemblistement le produit cartésien $L(G^*)^* \times L(G^*) \times ... \times L(G^*) = L(G^*)^* \times (L(G^*))^i$. On appellera 1 l'élément neutre de $L(G^*)$, e celui de G et on posera $[e] = 1$. Rappelons qu'un élément h de $L(G^*)^* = L(G^*) - \{1\}$ s'écrit de manière unique sous la forme d'un produit $[g_1]^{\epsilon_1}[g_2]^{\epsilon_2}...[g_l]^{\epsilon_l}$ avec $g_p \in G^* = G - \{e\}$, $\epsilon_p \in \{\pm 1\}$, pour $1 \leq p \leq l$ et $l \geq 1$ (cette écriture est donc supposée réduite, i.e., si $g_p = g_{p+1}$, alors $\epsilon_p = \epsilon_{p+1}$). L'application ([13]) :

$$< g_1, g_2, g_3, g_4, ..., g_{2k-1}, g_{2k} > \longrightarrow [g_1][g_2]^{-1}[g_3][g_4]^{-1}...[g_{2k-1}][g_{2k}]^{-1}$$

définie sur les symboles $< g_1, g_2, ..., g_{2k} >$ (les lacets réduits de longueur $2k$ selon la terminologie de [13] (p. 296)) avec $k \geq 1$, $g_p \in G$, $1 \leq p \leq 2k$ et $g_i \neq g_{i+1}$, $1 \leq i \leq 2k-1$, qui s'étend en un isomorphisme de groupe simplicial ([6], p.134) pour $F_\bullet(BL(G^*))$, montre qu'ensemblistement, on a $L(G^*)^* = G \times T_0$ où T_0 est l'ensemble des $< e, g_2, g_3, g_4, ..., g_{2k-1}, g_{2k} >$, $k \geq 1$, $g_p \in G$, $2 \leq p \leq 2k$ et $g_i \neq g_{i+1}$, $1 \leq i \leq 2k-1$. On a ainsi :

$$\mathcal{X}_0^{L(G^*)} = \bigvee_{a \in S_0^{L(G^*)}} S_a^1 = \bigvee_{b \in T_0, g \in G} S_{b,g}^1$$

et de façon générale, pour $i \geq 0$: $\mathcal{X}_i^{L(G^*)} = \bigvee_{a\in S_i^{L(G^*)}} S_a^1 = \bigvee_{b\in T_i, g\in G} S_{b,g}^1$ en notant $T_i = T_0 \times ((L(G^*))^i$; ceci montre que les espaces $\mathcal{X}_i^{L(G^*)}$ sont des G-bouquets de sphères.

L'action de G sur les $P_i^{L(G^*)} = L(S_i^{L(G^*)})$ est donnée par l'action de G sur les éléments de $S_i^{L(G^*)}$ définie sur $S_0^{L(G^*)}$ par l'action suivante sur les lacets réduits :

$$g. < g_1, g_2, g_3, g_4, ..., g_{2k-1}, g_{2k} >=< gg_1, gg_2, gg_3, gg_4, ..., gg_{2k-1}, gg_{2k} >$$

et sur $S_i^{L(G^*)}$ par : $g(h_0, h_1, h_2, ..., h_i) = (g.h_0, g.h_1, g.h_2, ..., g.h_i)$ avec $h_0 \in S_0 = L(G^*)^*$ et $h_k \in L(G^*)$ pour $1 \leq k \leq i$. On notera que cette action se traduit en particulier par : $g'[g] = [g'g][g']^{-1}$. Il est alors immédiat de vérifier que les opérateurs simpliciaux de $(P_\bullet^{L(G^*)})_1$ commutent à cette action.

6 Illustration

6.1 L'espace $\mathrm{map}_{\mathrm{pt}}^G(\widetilde{EG}, K(M,n))$

Soit M un $\mathbf{Z}[G]$-module et n un entier > 1 ; $K(M,n)$ l'espace d'Eilenberg-Mac-Lane est un G-espace dont le point-base (donné par l'élément neutre de M est laissé fixe par l'action de G.

Nous allons illustrer la suite spectrale du théorème précédent en l'appliquant à l'espace $\mathrm{map}_{\mathrm{pt}}^G(\widetilde{EG}, K(M,n))$ où $\widetilde{EG}$ est le G-CW-complexe libre donné par la cofibre de l'inclusion :

$$G^+ \hookrightarrow EG^+$$

en désignant par X^+, l'adjonction d'un point-base (laissé fixe par l'action de G) au G-espace X et par EG, le revêtement universel de $BG = K(G,1)$. Il est clair que $\widetilde{EG}$ a le type de G-homotopie de $K(L(G^*),1)$.

6.2 Remarques sur les morphismes de Π-algèbres

Soient P et Q deux Π-algèbres. On rappelle que $\hom(P,Q)$ est la Π-algèbre qui est formé en degré $q \geq 1$ de l'ensemble des morphismes $\mathrm{Hom}(P, Q^{S^q})$ (que l'on note encore $\hom(P,Q)_q$). Les remarques suivantes découlent directement de cette définition :

1. Si $Q_k = 0$ pour $k \geq n+1$, la Π-algèbre $\hom(P,Q)$ est nulle en degré $\geq n$, i.e. $\hom(P,Q)_q = 0$, si $q \geq n$.
2. Si $Q = \Pi Y$, Y étant un espace topologique, on a :
$\hom(P, \Pi Y)_q = \hom(P, \Pi\Omega^k Y)_{q-k}$ pour $0 \leq k \leq q-1$.
3. Si Y est un $K(M,n)$, $n > 1$ alors $\hom(P, \Pi Y)_q$ est nulle dés que $q \geq n$; de plus, si $1 \leq q \leq n-1$, l'ensemble de morphismes $\hom(P, \Pi Y)$ se réduit aux morphismes en degré $n-q$, i.e., $\mathrm{Hom}(P_{n-q}, \pi_{n-q}(K(M, n-q))) = \mathrm{Hom}(P_{n-q}, M)$.
4. Si on suppose de plus que P est une π-algèbre asphérique (i.e., $P_k = *$ si $k \geq 2$; c'est bien sûr le cas de la Π-algèbre associée à un $K(G,1)$) et Y un $K(M,n)$, $\hom(P, \Pi Y)$ est triviale en tous les degrés sauf éventuellement en degré $n-1$ où elle vaut $\mathrm{Hom}(P_1, M)$.

Bien entendu, ces remarques restent vraies dans le cas équivariant.

6.3 Étude de la suite spectrale

Puisque $\widetilde{EG} = K(L(G^*), 1)$, l'étude de l'espace $\mathrm{map}^G_{\mathrm{pt}}(\widetilde{EG}, K(M,n))$ nous mène, en utilisant le thérème 4.2, à la suite spectrale de Bousfield-Kan associée à l'espace cosimplicial

$$\mathrm{map}^G_{\mathrm{pt}}(\mathcal{X}^{L(G^*)}_\bullet, K(M,n))$$

et l'on a ([3], p.281 ; [2], 3.3 et prop. 10.2) :

$$E_1^{p,q} \;=\; N^p\pi_q(\mathrm{map}^G_{\mathrm{pt}}(\mathcal{X}^{L(G^*)}_\bullet, K(M,n)))$$

(Rappelons ([4], 2.2) que pour un groupe cosimplicial H^n, $N^n(H)$ désigne le groupe normalisé donné par : $N^n(H) \;=\; H^n \cap\ \ker s^0 \cap ... \cap\ \ker s^{n-1}$ et $N^\bullet H$ est alors un complexe de cochaînes pour $d = \sum_{i=0}^n (-1)^i d^i$ qui sera la différentielle d_1 de la suite spectrale.)

Comme $\Pi\mathcal{X}^{L(G^*)}_\bullet = P^{L(G^*)}_\bullet$ est une G-Π-algèbre libre, on a

$$\pi_q(\mathrm{map}^G_{\mathrm{pt}}(\mathcal{X}^{L(G^*)}_\bullet, K(M,n)))) \simeq \mathrm{hom}^G(P^{L(G^*)}_\bullet, \Pi K(M,n))_q$$

et, en tenant compte du fait que $P^{L(G)}_\bullet$ est asphérique, avec $(P^{L(G)}_\bullet)_1 = F_\bullet(BL(G))$ et des remarques effectuées précédemment, on a :

$$E_1^{p,q} = \begin{cases} \mathrm{Hom}^G(F_p(BL(G)), M) \cap (\bigcap_{0\le i\le p-1} \ker s^i), & \text{si } q = n-1 \\ 0 \ \ \text{sinon} \end{cases}$$

si bien que les seuls termes possiblement non nuls sont les termes $E_1^{p,n-1}$ avec $0 \le p \le n-2$; la suite spectrale est donc dégénérée et par convergence :

$$(*) \qquad\qquad \pi_k(\mathrm{map}^G_{\mathrm{pt}}(\widetilde{EG}, K(M,n))) \simeq E_2^{n-1-k,n-1}$$

Pour calculer ces termes E_2, notons que :

$$\mathrm{Hom}^G(F_p(BL(G^*)), M) \cap (\bigcap_{0\le i\le p-1} \ker s^i) \simeq \mathrm{Hom}^G(\overline{F_p(BL(G^*))}, M)$$

où, pour tout entier $p \ge 0$, $\overline{F_p(BL(G^*))}$ est le groupe libre engendré par les $(p+1)$-uplets $(h_0, h_1, ..., h_p)$ avec $h_i \in L(G^*)^*$ pour $0 \le i \le p$ (ceci revient à dire que l'on prend $F_p(BL(G^*))$ quotienté par l'image des dégénérescences).

Résultat 1 : Pour $1 \le p \le n-2$, on a :
1. $E_2^{p,n-1} \simeq H^{p+1}(G, M)$.
2. $\pi_p(\mathrm{map}^G_{\mathrm{pt}}(\widetilde{EG}, K(M,n))) \simeq H^{n-p}(G, M)$.

preuve : 1. On a en effet la suite d'égalités :

$$E_2^{p,n-1} = H^p(\overline{F_\bullet(BL(G^*))}, M) = H^p(\overline{F_\bullet(BL(G^*))}_{\mathrm{ab}}, M) = H^{p+1}(G, M)$$

La deuxième égalité (i.e., le passage aux abélianisés) provient du fait que M est abélien. Pour la troisième égalité, il suffit de remarquer que $(\overline{F_\bullet(BL(G^*))})_{\mathrm{ab}}$ est un groupe simplicial abélien libre ([13], la structure simpliciale est celle héritée de $\overline{F_\bullet(BL(G^*))}$) qui, en degré p, est le groupe abélien libre engendré par $(L(G^*)^*)^{p+1}$.

L'homologie du complexe $(\overline{F_\bullet(BL(G^*))})_{\mathrm{ab}}$ est égale à l'homologie du groupe $L(G^*)$ décalée d'un degré ([13], [5]), i.e. :

$$\begin{cases} H_p((\overline{F_\bullet(BL(G^*))})_{\mathrm{ab}}) = H_{p+1}(L(G^*)) = 0, \ \text{si } p \geq 1, \\ H_0((\overline{F_\bullet(BL(G^*))})_{\mathrm{ab}}) = H_1(L(G^*)) \simeq L(G^*)_{\mathrm{ab}} \end{cases}$$

Si l'on désigne par IG l'idéal d'augmentation de G, on notera qu'en identifiant $L(G^*)_{\mathrm{ab}}$ avec $\mathbf{Z}[G^*]$, le groupe libre abélien engendré par les éléments $[g]$ avec $g \in G$ et $g \neq e$, on a un isomorphisme de groupes : $L(G^*)_{\mathrm{ab}} \to IG$ donné par la correspondance : $[g] \mapsto 1 - g$; il résulte de l'action de G sur $L(G^*)$ (cf. lemme 5.3 : $g[g'] = [gg'][g]^{-1}$) que cette correspondance est un isomorphisme de $\mathbf{Z}[G]$-modules.

Posons $R_k = (\overline{F_{k-1}(BL(G^*))})_{\mathrm{ab}}$ pour $k \geq 1$, $R_0 = \mathbf{Z}[G]$ et $R_{-1} = \mathbf{Z}$; pour $k \geq 2$, on a les morphismes $\delta_k : R_k \to R_{k-1}$ qui sont ceux du complexe $(\overline{F_\bullet(BL(G))})_{\mathrm{ab}}$, $\delta_1 : R_1 \to R_0$ est la composition $\mathbf{Z}[L(G^*)^*] \twoheadrightarrow IG \hookrightarrow \mathbf{Z}[G]$ et δ_0 est l'homomorphisme d'augmentation. Le complexe $(R_k)_{k\geq -1}$ est exact et $(R_k)_{k\geq 0}$ est donc une résolution de $\mathbf{Z}$. Mais la structure de G-ensemble libre (lemme 5.3) sur les ensembles de générateurs des $F_k(BL(G^*))$ munit les groupes abéliens libres $(\overline{F_k(BL(G^*))})_{\mathrm{ab}}$ d'une structure de $\mathbf{Z}[G]$-module libre pour laquelle les δ_k (y compris δ_1) sont des $\mathbf{Z}[G]$-homomorphismes. Autrement dit, $(R_k)_{k\geq 0}$ est une $\mathbf{Z}[G]$-résolution libre de $\mathbf{Z}$, ce qui achève la preuve de la troisième égalité.

2. Ce résultat se déduit immédiatement de $(*)$.

Remarque : On notera que la G-cofibration $G^+ \hookrightarrow EG^+ \to \widetilde{EG}$ induit des isomorphismes :

$$\pi_k(\mathrm{map}^G(EG, K(M,n))) \simeq \pi_k(\mathrm{map}^G_{\mathrm{pt}}(\widetilde{EG}, K(M,n)))$$

pour $k < n-1$ et que ce dernier résultat implique donc aussi que l'on a, pour $1 \leq k \leq n-2$:

$$\pi_k(\mathrm{map}^G(EG, K(M,n))) \simeq H^{n-k}(G, M)$$

qui est un résultat connu (voir [14]) si l'on interprète l'espace $\mathrm{map}^G(EG, K(M,n))$ comme l'espace des sections au-dessus de BG de la fibration de Borel associée au G-espace $K(M,n)$, c'est-à-dire, à la fibration d'espace total $EG \times_G K(M,n)$.

Résultat 2 : 1. $E_2^{0,n-1} \simeq Der(G,M)$, le groupe des dérivations de G dans M.

2. $\pi_{n-1}(\mathrm{map}^G_{\mathrm{pt}}(\widetilde{EG}, K(M,n))) \simeq Der(G,M)$.

preuve : 1. Le calcul direct à partir du complexe $(\overline{F_\bullet(BL(G))})_{\mathrm{ab}}$ donne, en reprenant les notations introduites dans la preuve du résultat 1 :

$$\begin{aligned} E_2^{0,n-1} &= \mathrm{Ker}\ \delta_2^* : Hom^G(R_2, M) \to Hom^G(R_1, M) \\ &\simeq Hom^G(L(G^*)_{\mathrm{ab}}, M) \\ &\simeq Hom^G(IG, M) \\ &\simeq Der(G, M) \end{aligned}$$

où on utilise l'isomorphisme entre $L(G^*)_{\mathrm{ab}} = \mathbf{Z}[G^*]$ et IG décrit précédemment.

2. Découle de $(*)$.

En conclusion, on notera que ces résultats restent bien sûr valables dans le cas où M est un G-module trivial mais peuvent s'obtenir alors en étudiant directement la Π-algèbre $\Pi(\mathrm{map}_{\mathrm{pt}}(BG, K(M,n))$; il suffit alors d'appliquer la suite spectrale de [10] en prenant pour résolution la Π-algèbre simpliciale libre et asphérique donnée par $F_\bullet(BG)$.

Appendice : Sur la construction d'une résolution

A.1 Rappelons qu'un cotriple ([1] ; [16] où cette notion porte le nom de comonade) dans une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée d'un endofoncteur T de $\mathcal{C}$ et de transformations (I désigne le foncteur identité) :

$$\eta \ : \ T \longrightarrow \mathrm{I} \qquad \text{et} \qquad \mu \ : \ T \longrightarrow T^2$$

telles que les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{I}T & \overset{\eta T}{\leftarrow} & T^2 & \overset{T\eta}{\rightarrow} & T\mathrm{I} \\ & = \nwarrow & \mu \uparrow & \nearrow = & \\ & & T & & \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} T & \overset{\mu}{\rightarrow} & T^2 \\ \mu \downarrow & & \downarrow \mu T \\ T^2 & \overset{T\mu}{\rightarrow} & T^3 \end{array}$$

soient commutatifs.

De l'existence de ces transformations et de ces relations découle que, si on pose :

$$d_i \ = \ T^i \eta T^{n-i} \ : \ T^{n+1} \ \longrightarrow \ T^n \ , \qquad i = 0, ..., n$$

et

$$s_i \ = \ T^i \mu T^{n-i-1} \ : \ T^n \ \longrightarrow \ T^{n+1} \ , \qquad i = 0, ..., n-1,$$

on a défini des opérateurs *face* et *dégénérescence* qui vérifient les relations simpliciales usuelles. On obtient donc un objet simplicial :

$$T \ \begin{array}{c} \overset{d_0}{\leftarrow} \\ \overset{d_1}{\leftarrow} \end{array} \ T^2 \ \begin{array}{c} \overset{d_0}{\leftarrow} \\ \overset{d_1}{\leftarrow} \\ \overset{d_2}{\leftarrow} \end{array} \ ...$$

De plus, si $\mathcal{A}$ est une autre catégorie et $F \ : \ \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ un foncteur tel qu'il existe une transformation naturelle $\theta \ : \ F \to FT$ pour laquelle la composition :

$$F \overset{\theta}{\rightarrow} FT \overset{F\eta}{\rightarrow} F$$

soit égale à l'identité, alors, pour tout objet X de $\mathcal{C}$, l'existence de θ entraîne celle d'une contraction ([1], p. 247) : $FX \to FTX$ du complexe simplicial augmenté FT^*X :

$$FX \overset{F\eta}{\leftarrow} FTX \leftarrow FT^2X \leftarrow FT^3X \leftarrow ...$$

Lorsque FT^*X est un complexe de Kan ([17], p.3), on a alors $\pi_n(FT^*X) = 0$ si $n \geq 1$ et $\pi_0(FT^*X) = FX$ pour tout X de $\mathcal{C}$.

A.2 Dans le cas qui nous concerne, $\mathcal{C} = G - \mathrm{CW}_\bullet$ est la catégorie des G-CW-complexes pointés, $T = \mathcal{V}^G$ et les transformations η^G et μ^G sont données, pour chaque G-CW-complexe X, par les applications suivantes :

– $\eta^G_X : \mathcal{V}^G(X) \to X$ envoie la sphère $S^n_{f,g}$ (resp. la cellule $D^n_{h,g}$) sur $f(S^n) \subset X$ (resp. sur $h(D^n) \subset X$).
Cette application est équivariante puisque l'on a la suite d'égalités :
$\eta^G_X(g'S^n_{f,g}) = \eta^G_X(S^n_{g'f,g'g}) = (g'f)(S^n) = g'.f(S^n) = g'.\eta^G_X(S^n_{f,g})$
(et $\eta^G_X(g'S^n_{f,g})$ est égal à l'image de S^n dans X par la composée $S^n \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g'} X$).

– $\mu^G_X : \mathcal{V}^G(X) \to \mathcal{V}^G_X(\mathcal{V}^G(X))$ envoie la sphère $S^n_{f,g}$ (resp. la cellule $D^n_{h,g}$) sur la sphère $S^n_{i_{f,g},g}$ (resp. sur la cellule $D^n_{i_{h,g},g}$) indéxée par l'application : $i_{f,g} : S^n \xrightarrow{id} S^n_{f,g} \subset \mathcal{V}^G(X)$ (resp. indéxée par l'application : $i_{h,g} : D^n \xrightarrow{id} D^n_{h,g} \subset \mathcal{V}^G(X)$).
$\mu^G_X(g'S^n_{f,g}) = \mu^G_X(S^n_{g'f,g'g}) = S^n_{i_{g'f,g'g},g'g}$ qui est la sphère indéxée par l'application $S^n \xrightarrow{id} S^n_{g'f,g'g} \subset \mathcal{V}^G(X)$; puisque $S^n_{g'f,g'g} = g'S^n_{f,g}$, cela revient à considérer l'application : $S^n \xrightarrow{id} S^n_{f,g} \xrightarrow{g'} S^n_{g'f,g'g} \subset \mathcal{V}^G(X)$, c'est-à-dire : $g'.S^n_{i_{f,g},g} = g'\mu^G_X(S^n_{f,g})$.
μ^G_X est donc une application équivariante.

La construction $\mathcal{V}^G$ est fonctorielle ; si $\phi : X \to Y$ est une application équivariante entre deux G-espaces X et Y, alors $\mathcal{V}^G(\phi) : \mathcal{V}^G(X) \to \mathcal{V}^G(Y)$, qui envoie la sphère $S^n_{f,g}$ (resp. la cellule $D^n_{h,g}$) de $\mathcal{V}^G(X)$ sur la sphère $S^n_{\phi\circ f,g}$ (resp. la cellule $D^n_{\phi\circ h,g}$) de $\mathcal{V}^G(Y)$, est aussi équivariante.

Une vérification (fastidieuse mais sans difficulté particulière) sur les sphères et les cellules qu'utilise la construction permet de vérifier qu'on a bien les relations de commutation recherchées : $(\mathcal{V}^G\eta^G)\mu^G = 1 = (\eta^G\mathcal{V}^G)\mu^G$ ainsi que $(\mathcal{V}^G\mu^G)\mu^G = (\mu^G\mathcal{V}^G)\mu^G$.

On obtient ainsi un G-CW-complexe simplicial pointé augmenté :

$$.... \to V^G_k(X) \to V^G_{k-1}(X) \to .... \to V^G_1(X) \to V^G_0(X) \xrightarrow{\eta^G} X$$

A.3 Pour reprendre les notations de A.1. et en notant $\mathcal{G}Group$ la catégorie des groupes gradués (par les entiers strictement positifs), il existe un foncteur $F : G - \mathrm{CW}_\bullet \to \mathcal{G}Group$ défini par $F(X) = (\pi_n(X))_{n\geq 1}$.

Soit $[f] \in \pi_n(X)$ et $\overline{f} : S^n \xrightarrow{1} S^n_f \subset \mathcal{V}^G(X)$ qui définit une classe $[\overline{f}] \in \pi_n(\mathcal{V}^G(X))$. Cette correspondance permet de définir la transformation $\theta : F \to F\mathcal{V}^G$ qui, pour tout G-CW-complexe X et tout entier $n \geq 1$, est donc donnée par :

$$\begin{array}{rccc} \theta_{n,X} & : & \pi_n(X) & \longrightarrow \pi_n(\mathcal{V}^G(X)) \\ & & [f] & \to [\overline{f}] \end{array}$$

Il est clair que la composition $(F\eta^G) \circ \theta$ est égale à l'identité ; par conséquent, pour tout G-CW-complexe X et tout $n \geq 1$, $\theta_{n,X}$ est une contraction. Par ailleurs, pour tout $n \geq 1$, le groupe simplicial $(\pi_n(V^G_.(X))$ est un complexe de Kan ([17], theorem 17.1). On peut donc conclure que, pour la G-Π-algèbre simpliciale :

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\cdots & \to & \pi_p(V_k^G(X)) & \to & \pi_p(V_{k-1}^G(X)) & \to & \cdots & \to & \pi_p(V_1^G(X)) & \to & \pi_p(V_0^G(X)) & \stackrel{(\eta_X^G)_*}{\to} & \pi_p(X) \\
\cdots & \to & \pi_{p-1}(V_k^G(X)) & \to & \pi_{p-1}(V_{k-1}^G(X)) & \to & \cdots & \to & \pi_{p-1}(V_1^G(X)) & \to & \pi_{p-1}(V_0^G(X)) & \stackrel{(\eta_X^G)_*}{\to} & \pi_{p-1}(X) \\
 & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\cdots & \to & \pi_1(V_k^G(X)) & \to & \pi_1(V_{k-1}^G(X)) & \to & \cdots & \to & \pi_1(V_1^G(X)) & \to & \pi_1(V_0^G(X)) & \stackrel{(\eta_X^G)_*}{\to} & \pi_1(X)
\end{array}
$$

(où $(\eta_X^G)_*$ est l'application induite par η_X^G), on a les égalités :

$$
\begin{array}{l}
\forall q, p \geq 1, \quad \pi_q \pi_p(V_.^G(X)) = 0 \\
\forall p \geq 1, \quad \pi_0 \pi_p(V_.^G(X)) \simeq \pi_p(X)
\end{array}
$$

Ceci prouve la proposition 3.2.1.

Références

[1] Barr M., Beck J., *Homology and standard constructions*, Lect. Notes in Math., 80, 1967, 245-335.

[2] Bousfield A.K., *Homotopy spectral sequence and obstructions*, Israel J. of M., 66(1989), Nos 1-3, 54-104.

[3] Bousfield A.K., Kan D.M., *Homotopy limits, completions and localizations,* Lect. Notes in Math., 304, 1972.

[4] Bousfield A.K., Kan D.M., *A second quadrant homotopy spectral sequence*, TAMS, 177(1973), 305-318.

[5] Cartan H., *Sur la théorie de Kan*, Séminaire H. Cartan (1956/57), Exposé n° 1.

[6] Curtis E.B., *Simplicial homotopy theory,* Advances in Math., 6, 1971, 107-209.

[7] tom Dieck T., *Transformations groups*, Walter de Gruyter, 1987.

[8] Dwyer W.G., Kan D.M., *The envelopping ring of a* Π*-algebra.* Advances in Homotopy Theory, London Math. Soc. Lect. Note. Ser. vol. 139, 1989, 49-60.

[9] Dwyer W.G., Kan D.M., *Homology and cohomology of* Π*-algebras*, Trans. of the Am. Math. Soc., number 1, 342, 1994, 257-273.

[10] Dwyer W.G., Kan D.M., Smith J.H., Stover C.R., *A* Π*-algebra spectral sequence for function spaces*, Proc. of the Am. Math. Soc., number 2, 120, 1994, 615-621.

[11] Greenlees J.P.C., *Stable maps into free G-spaces*, Trans. of the Am. Math. Soc., number 2, 310, 1988, 199-215.

[12] Greenlees J.P.C., May J.P., *Equivariant stable homotopy theory*, Handbook of Algebraic Topology (ed. by I.M. James), North Holland, 1995, 277-323.

[13] Kan D.M., *A combinatorial definition of homotopy groups*, Annals of Math., vol 67, number 2, 1958, 287-312.

[14] Legrand A., *Homotopie des Espaces de Sections*, Lect. Notes in Math. 941, 1982.

[15] Lewis L.G., May J.P., Steinberger M., *Equivariant stable homotopy theory*, Lect. Notes in Math., 1213, 1986.

[16] Mac Lane S., *Categories for the Working Mathematician* Springer Verlag, Grad. Texts in Math. 5, 1971.

[17] May J.P., *Simplicial objects in algebraic topology*, van Nostrand, 1967.

[18] Stover C.R., *A van Kampen spectral sequence for higher homotopy groups*, Topology, 29, 1990, 9-26.

[19] Whitehead G.W., *Elements of homotopy theory*, Springer Verlag, Grad. Texts in Math. 61, 1978.

Andrea Solotar
Adresse permanente : Dto de Matemática, Facultad de Cs. Exactas y Naturales.
Universidad de Buenos Aires.
Ciudad Universitaria Pab.I- 1428,
Buenos Aires, Argentina.

Etienne Fieux
Université Paris-Sud, Mathématiques,
Batiment 425,
91405 Orsay CEDEX
France.
e-mail : asolotar@dm.uba.ar , fieux@topo.math.u-psud.fr