PRÁCTICA IV

ALGEBRA CONMUTATIVA - 1ER. CUATRIMESTRE 2014

En toda la práctica, A denota siempre un anillo conmutativo con unidad 1. La referencia [A-M] se refiere al libro de Introducción al Álgebra Conmutativa de Atiyah - Macdonald.

Ejercicio 1. Consideremos el anillo $A = k[x, y]/\langle x^3 - y^2\rangle$ del ejercicio 1 de la práctica I. Probar que la clausura entera de A (en su cuerpo de fracciones) es el anillo $B = k[t]$ (Sug.: Yo hablé de este ejercicio en clase).

Ejercicio 2. Sea k un cuerpo y consideremos el anillo $A = k[a_0, a_1]$. Sea B el anillo cociente $B = k[x, a_0, a_1]/\langle x^2+a_1x+a_0\rangle$. Entonces A se inyecta en B (o sea, puede pensarse como un subanillo de B) y la extensión es entera (¿por qué?). Consideremos el ideal maximal de A definido por $\mathcal{P} = \langle a_0-2, a_1+3\rangle$. Entonces sabemos que existe (al menos) un ideal $\mathcal{M}$ maximal en B tal que $\mathcal{M}\cap A = \mathcal{P}$. Encontrar todos los ideales maximales de B con esta propiedad (Sug.: Yo hablé de este ejercicio en clase).

Ejercicio 3. Sean $A \subset B \subset C$ anillos tales que B es entero sobre A y C es entero sobre B. Probar que C es entero sobre A.

Ejercicio 4. Hacer los ejercicios 12 y 13 del cap. 5 del libro [A-M].

Ejercicio 5. Hacer el ejercicio 28 del cap. 5 del libro [A-M].

Ejercicio 6. Hacer el ejercicio 1 del cap. 6 del libro [A-M].

Ejercicio 7. Hacer el ejercicio 4 del cap. 6 del libro [A-M].

Ejercicio 8. Sea A un anillo Artiniano. Probar que $Spec(A)$ es discreto (es decir, todo subconjunto es abierto) y finito.

Ejercicio 9. Vimos en clase que para todo anillo de Artin A, si $0 = \cap_{i=1}^n Q_i$ es una descomposición primaria irredundante del ideal 0, entonces A es isomorfo al producto de los anillos locales A/Q_i. Probar que si un anillo de Artin A es isomorfo a un producto directo $\Pi_{i=1}^m A_i$ donde los A_i son anillos locales de Artin, entonces $m = n$ y es posible reordenar los índices de modo que cada A_i sea isomorfo al cociente A/Q_i. (Sug: ver la demostración del Teorema 8.7 en el libro [A-M]).