PRÁCTICA II

ALGEBRA CONMUTATIVA - 1ER. CUATRIMESTRE 2006

Ejercicio 1. Hacer los ejercicios 1 y 2 del Cap.IV del libro [A-M].

Ejercicio 2. Hacer los ejercicios 4 y 5 del Cap. IV del libro [A-M].

Ejercicio 3. Hacer los ejercicios 7 y 8 del Cap. IV del libro [A-M].

Ejercicio 4. Dado un ideal primo $\mathcal{P}$ en A, denotemos por $S_{\mathcal{P}}(0)$ el núcleo del homomorfismo canónico de A en $A_{\mathcal{P}}$. Probar que

i) $S_{\mathcal{P}}(0)$ está contenido en $\mathcal{P}$.
ii) $\sqrt{S_{\mathcal{P}}(0)} = \mathcal{P}$ si y solo si $\mathcal{P}$ es un primo minimal de A.
iii) Probar que $S_{\mathcal{P}}(0)$ está contenido en todo ideal $\mathcal{P}$-primario y que es $\mathcal{P}$-primario (es decir, es el menor ideal $\mathcal{P}$ -primario).

Ejercicio 5. Hacer el ejercicio 13 del Cap. IV del libro [A-M].

Ejercicio 6. Si I y J son dos ideales de A, probar que $A/I \otimes_A A/J \simeq A/I + J$.

Ejercicio 7. Sea $f : A \to B$ un morfismo de anillos tal que B es entero sobre su subanillo $f(A)$.

i) Probar que todo primo de A que contiene al núcleo de f es la contraccion J^c de un ideal primo J de B.
ii) Probar que para todo ideal primo J en B, $\dim J = \dim J^c$.
iii) Probar que $f^* : Spec(B) \to Spec(A)$ definida por $f^*(J) = f^{-1}(J) = J^c$ es una aplicación cerrada.

Ejercicio 8. Sea M un A-módulo de longitud 1, o sea $M \simeq A/\mathcal{P}$, con $\mathcal{P}$ un ideal maximal de A. Probar que para todo ideal maximal $\mathcal{M}$ de A vale:

i) Si $\mathcal{M} = \mathcal{P}$, entonces $M_{\mathcal{M}} = M$.
ii) Si $\mathcal{M} \neq \mathcal{P}$, entonces $M_{\mathcal{M}} = 0$.

Ejercicio 9. Sea $\mathcal{P}$ un ideal primo de A. Es cierto que el cociente de la localización $A_{\mathcal{P}}/\mathcal{P}A_{\mathcal{P}}$ es igual al cuerpo de fracciones del cociente $A/\mathcal{P}$ (es decir a la localización del cociente $A/\mathcal{P}$ en el ideal primo 0=imagen de $\mathcal{P}$)?

Ejercicio 10. Hacer el ejercicio 4 del Capítulo VII de [A-M].

Ejercicio 11. Sea A un anillo Artiniano. Probar que $Spec(A)$ es discreto y finito.

Ejercicio 12. Usar el Lema de Normalización de Noether para probar que $k[x_1, \ldots, x_n]$ tiene dimensión menor o igual que n. Deducir que tiene dimensión n.