Práctica para entregar - Primera parte

1. Sean $f_1 = x^3 + y^3,\ f_2 = x^4 + y^4$ e $I =< f_1, f_2 >$.

a) Encontrar $V(I)$.

b) Probar que $\{f_1, f_2\}$ no es GB para ningún orden monomial.

c) Encontrar la dimensión y una base del cociente $\mathbb{C}[x, y]/I$.

2. Sean $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ que generan un ideal I con finitos ceros complejos y $f = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ lineal.

a) Encontrar un algoritmo que verifique si f separa puntos de $V(I)$.

b) Aplicando ese algoritmo, encontrar todas las f lineales que separan los puntos de $V(I)$ para $I =< x^3 + y^5, x^2 - 2y^2 >$.

3. Sea $I \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal con finitos ceros complejos $\{p_1, \ldots, p_d\}$. Denotemos por $\mathcal{M}_i$ el ideal maximal asociado a p_i, es decir todos los polinomios que se anulan en p_i. Probar que existe un número natural N tal que la intersección $\cap_{i=1}^{d} \mathcal{M}_i^N$ está contenida en I.

4. Sean $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ que generan un ideal I con finitos ceros complejos y $h \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ que no se anula en ningún cero de I.

a) Encontrar un algoritmo que calcule un polinomio g tal que $h \cdot g - 1 \in I$, o sea tal que la clase de g sea el inverso respecto del producto de la clase de h en el cociente $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I$.

b) Encontrar g en el siguiente caso: $I =< x(x-1), y(y-1) >, t(x, y) = x + 2y$, $f(T) \in \mathbb{C}[T]$ el polinomio característico de la multiplicación por t en $\mathbb{C}[x, y]/I$, $h(x, y) = f'(t)$. Comprobar que h no es de la forma $F(t)$ para ningún polinomio univariado F.

5. Hacer todo el Tutorial 26: Graph Colourings, de la página 143 del libro de Kreuzer y Robbiano (les adjunto fotocopia). Donde pide un programa en CoCoa, hacerlo en Maple, Singular o Macaulay.

6. Una manera de enunciar el Teorema de Apolonio sería definir los polinomios $f1,\ldots,f6,p$ que están a continuación y ver que p se anula cada vez que $f1\ldots,f6$ se anulan. O sea que si en maple ponemos los inputs $f1 := u*x-v*y; f2 := 2*x1-x; f3 := 2*y1-y; f4 := (x1-a)^2+b^2-a^2-(b-y1)^2; f6 := a^2+(b-y1)^2-(x1-a)^2-(y1-b)^2; f5 := y*u+x*v-x*y; p := (u-a)^2+(v-b)^2-a^2-(b-y1)^2;$ y calculamos: with(Groebner): $G1 := gbasis([f1,f2,f3,f4,f5,f6], plex(x,y,x1,y1,a,b,u,v));$ y luego buscamos

$$normalf(expand(p), G1, plex(x,y,x1,y1,a,b,u,v))$$

y nos diera 0, el teorema estaría probado. Sin embargo, esta normalform no da cero sino $u^2-2au+v^2-2bv$. Enunciar correctamente y demostrar el Teorema de Apolonio con maple.

7. Consideremos un sistema polinomial $f_1 = \cdots = f_m = 0$ con finitos ceros $V = A \cup B$, donde todos los puntos en A tienen al menos dos coordenadas iguales y todos los puntos de B tienen todas las coordenadas distintas. Encontrar un algoritmo que calcule ecuaciones cuyos ceros sean exactamente B.

8. Dados dos enteros positivos m, n encontrar un ideal radical explícito I y un orden monomial $\prec$ tal que $LT_{\prec}(I) =< x_1,\ldots,x_n >^m$.

9. Determinar el número de soluciones reales del sistema

$$\begin{aligned} 0 &= x^2+2y^2-y-2z \\ 0 &= x^2-8y^2+10z-1 \\ 0 &= x^2-7yz \end{aligned}$$

en la caja $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < 1\}$.

10. Consideremos los ideales $I_t =< y - x^2, x^3 - t >$ en $\mathbb{C}[x,y]$, donde $t \in \mathbb{C}$ es un parámetro.

a) ¿Cuáles son los puntos de $V(I_t)$ para $t \neq 0$? Mostrar que cada punto tiene multiplicidad 1; por lo tanto A_i es isomorfo a $\mathbb{C}$ para cada i.

b) Calcular $V(I_0)$ y las multiplicidades en este caso.

c) ¿ Adónde tienden los puntos de $V(I_t)$ cuando $t \to 0$?

11. Sea $I \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal con finitos ceros complejos y $h_i(T)$ el polinomio minimal de la multiplicación m_{x_i} por x_i en el cociente por I.

a) Demostrar que $h_i(x_i)$ es el generador mónico de $I \cap \mathbb{C}[x_i]$.

b) Probar que I es radical si y sólo si las matrices de $m_{x_1}, \ldots, m_{x_m}$ (en alguna base) son diagonalizables.

12. Sea $I \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal con finitos ceros complejos $\{p_1, \ldots, p_d\}$. Para cada $i = 1, \ldots, d$, llamemos $I_i := \{f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \ : \ \exists g \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n], g(p_i) \neq 0 \text{ y } \ g \cdot f \in I\}$. Probar que:

a) I_i es un ideal. ¿ Cuál es el radical de I_i?

b) $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I_i$ es isomorfo a la localización en p_i $(\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I)_{p_i}$.

c) $\cap_{i=1}^r I_i = I$.

d) Si e_i es el idempotente asociado a p_i (es decir, $e_i - 1 \in I_i, e_i \in I_j \forall j \neq i$), entonces $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I_i$ es isomorfo a $e_i \cdot \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I$ (como $\mathbb{C}$-álgebra).

e) Dado un ideal M se nota

$$(I : M^\infty) = \{f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \ : \ f \cdot g \in I \text{ para todo g} \in \mathrm{M}^\mathrm{r}, \text{ para algun } \ \mathrm{r}\}$$

(saturación). Probar que $(I : M^\infty)$ es un ideal y que si M es el maximal en un punto p_i de $V(I)$ entonces $V((I : M^\infty)) = V(I) \setminus \{p_i\}$ y que $I_i = (I : (I : M^\infty))$.

f) Si se conocen explícitamente las coordenadas de un cero p_i de I y (finitos) generadores de I, dar un algoritmo para calcular I_i.