УДК 517.55+517.953

Алгебраичность решений системы уравнений Меллина и ее монодромия

Алисия Дикенштейн
Математический факультет, Университет Буэнос-Айреса, (1428) Буэнос-Айрес, Аргентина.[*]

Тимур Садыков
Факультет математики и информатики, Красноярский государственный университет, 660041, Красноярск, Россия.[†]

Рассмотрим класс алгебраических функций, удовлетворяющих алгебраическим уравнениям с символьными коэффициентами, то есть уравнениям вида

$$a_0 z^m + a_1 z^{m_1} + \ldots + a_n z^{m_n} + a_{n+1} = 0. \tag{1}$$

Здесь $n \geq 1$, $m > m_1 > \ldots > m_n > 0$, $m, m_i \in \mathbb{N}$, $z = z(a_0, \ldots, a_{n+1})$ – функция комплексных переменных $a_0, \ldots, a_{n+1}$. Любое решение уравнения (1) удовлетворяет гипергеометрической системе Гельфанда-Капранова-Зелевинского [1],[5], определяемой матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ m & m_1 & \ldots & m_n & 0 \end{pmatrix}$$

и показателями однородности $(0, -1)$. Отсюда в частности следует, что решение уравнения (1) является биоднородной функцией и потому мономиальной заменой сводится к функции от n переменных. Например, разделив уравнение (1) на $-a_{n+1}$ и сделав замену переменных

---

[*]Electronic address: alidick@dm.uba.ar; Алисия Дикенштейн была частично поддержана грантами UBACYT X042 и CONICET PIP 5617, Аргентина.

[†]Electronic address: sadykov@lan.krasu.ru; URL: www.lan.krasu.ru/pages/sadykov; Тимур Садыков был частично поддержан грантом РФФИ 05-01-00517, грантом МК-851.2006.1 Президента Российской Федерации и грантом 06-01-91063 РФФИ и Японского общества продвижения науки.

$y = (-a_0/a_{n+1})^{1/m} z$, сведем (1) к уравнению

$$y^m + x_1 y^{m_1} + \ldots + x_n y^{m_n} - 1 = 0. \tag{2}$$

Согласно классическому результату Меллина [3] решение $y(x) = y(x_1, \ldots, x_n)$ уравнения (2) удовлетворяет следующей системе из n дифференциальных уравнений в частных производных гипергеометрического типа:

$$\prod_{k=0}^{m_j-1} (m_1\theta_1 + \ldots + m_n\theta_n + mk + 1) \times$$

$$\prod_{k=0}^{m_j^{'}-1} (m_1^{'}\theta_1 + \ldots + m_n^{'}\theta_n + mk - 1) y(x) =$$

$$(-1)^{m_j} m^m \frac{\partial^m y(x)}{\partial x_j^m}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

где $\theta_j = x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ и $m_j^{'} = m - m_j$. Система (3) называется *системой Меллина,* соответствующей алгебраическому уравнению (2).

Цель настоящей работы состоит в исследовании пространства решений системы Меллина. Мы строим базис в этом пространстве и доказываем приводимость монодромии системы Меллина. При этом решения данной системы находятся конструктивно, в замкнутой форме.

Для мультииндекса $I = (i_1, \ldots, i_n)$ и комплексного вектора $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ через x^I будем обозначать моном $x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$. Введем обозначения $B = \{(i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{Z}^n : 0 \le i_j \le m-1, \quad j = 1, \ldots, n\}$, $\varepsilon = e^{2\pi i/m}$.

Теорема 1 *Голономный ранг системы Меллина (3) (то есть число ее линейно независимых решений в окрестности точки общего положения) равен m^n. Существует базис $\{f_I\}_{I \in B}$ в пространстве решений системы Меллина в окрестности нуля, такой, что $f_I(x) = x^I \tilde{f}_I(x_1^m, \ldots, x_n^m)$, где $\tilde{f}_I$ голоморфна в нуле и $\tilde{f}_I(0) \neq 0$ для любого $I \in B$.*

Доказательство может быть получено путем переноса идей доказательства теорем 2.8 и 3.1 из [4] на случай неконфлюэнтной гипергеометрической системы уравнений, каковой является система (3). ☐

Голоморфную вблизи нуля функцию $y(x)$, удовлетворяющую системе Меллина и обладающую свойством

$$\frac{\partial^{|I|} y(0)}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} \neq 0, \ \forall I \in B,$$

назовем *порождающим решением* системы Меллина.

Теорема 2 *Голоморфное в окрестности нуля решение $y(x)$ системы Меллина является порождающим в том и только том случае, когда семейство из m^n функций $y_I(x) = y(\varepsilon^{i_1} x_1, \ldots, \varepsilon^{i_n} x_n)$, $I = (i_1, \ldots, i_n) \in B$ есть базис в пространстве голоморфных решений системы Меллина.*

Доказательство. Пусть $y(x)$ – порождающее решение системы Меллина. Дифференциальные операторы $\theta_k = x_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ и $\frac{\partial^m}{\partial x_k^m}$ инвариантны относительно замены переменных $t_k = \varepsilon^{i_k} x_k$, для любого $k = 1, \ldots, n$. Так как уравнения в системе Меллина содержат лишь операторы данного вида, функция $y_I(x) = y(\varepsilon^{i_1} x_1, \ldots, \varepsilon^{i_n} x_n)$ является решением системы (3) для любого $I \in B$. Линейная независимость семейства из m^n функций $\{y_I(x)\}_{I \in B}$ следует из того, что n-я тензорная степень матрицы Вандермонда, заданной числами $1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{n-1}$, является невырожденным линейным отображением, преобразующим данное семейство функций в базис системы Меллина из теоремы 1. ☐

Меллин показал [3], что так называемая главная ветвь $y_{pr}(x)$ решения алгебраического уравнения (2), принимающая значение 1 в начале координат, допускает следующее разложение в степенной ряд:

$$y_{pr}(x) = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n \geq 0} \frac{(-1)^{|\nu|}}{m^{|\nu|}} \ \varphi_{\nu_1, \ldots, \nu_n} \ x^{\nu}, \tag{4}$$

где

$$\varphi_{\nu_1,\dots,\nu_n} = \frac{\prod_{\mu=1}^{|\nu|-1}(m_1\nu_1 + \ldots + m_n\nu_n - m\mu + 1)}{\nu_1!\ldots\nu_n!}.$$

Здесь $|\nu| = \nu_1 + \ldots + \nu_n$, а пустое произведение считается равным 1. Можно показать, что $y_{pr}(x)$ – порождающее решение системы Меллина, если наибольший общий делитель $d :=$Н.О.Д.$(m, m_1, \ldots, m_n) > 1$. Поэтому из теоремы 2 вытекает такое следствие:

Следствие *Если* $d > 1$, *то семейство функций* $\{y_{pr}(\varepsilon^{i_1}x_1, \ldots, \varepsilon^{i_n}x_n)\}_{I\in B}$ *есть базис в пространстве решений системы Меллина (3).* $\square$

Зафиксируем мультииндекс $I = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ и рассмотрим алгебраическое уравнение

$$y^m + \varepsilon^{i_1}x_1y^{m_1} + \ldots + \varepsilon^{i_n}x_ny^{m_n} - 1 = 0. \qquad (5)$$

Все решения уравнений вида (5) лежат в пространстве решений системы Меллина (3). Среди уравнений вида (5) имеется m^n различных уравнений, которые могут быть параметризованы мультииндексом $I \in B$. Обозначим через Y комплексное линейное пространство, порожденное всеми корнями всех уравнений вида (5).

Решения уравнения (5), соответствующего индексу $I_j = (jm_1, \ldots, jm_n)$ для любого $j = 1, \ldots, m - 1$ лишь постоянным множителем отличаются от корней исходного уравнения (2) (которое соответствует $j = 0$). Более того, существует m^{n-1} множеств $G^{(1)}, \ldots, G^{(m^{n-1})}$ алгебраических уравнений вида (5), каждое из которых состоит из m уравнений, таких, что для любых двух уравнений вида (5) из одного множества $G^{(k)}$ решения этих уравнений отличаются лишь постоянными множителями. Пусть $\{I^{(1)}, \ldots, I^{(m^{n-1})}\}$ – набор мультииндексов, таких, что $I^{(k)} \in B$ соответствует некоторому алгебраическому уравнению из множества $G^{(k)}$. Обозначим через $y_1^{(k)}, \ldots, y_m^{(k)}$ решения алгебраического уравнения (5), соответствующего мультииндексу $I^{(k)}$, заданные в некоторой достаточно малой окрестности нуля.

Пусть задан комплексный вектор $c = (c^{(1)}, \ldots, c^{(m^{n-1})}) \in \mathbb{C}^{m^{n-1}}$. Обозначим через χ_c функцию

$$\chi_c = \sum_{k=1}^{m^{n-1}} c^{(k)}(y_1^{(k)} \log(y_1^{(k)}) + \cdots + y_m^{(k)} \log(y_m^{(k)})), \tag{6}$$

при любом выборе голоморфных ветвей логарифмов.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 3 *Обозначим через d наибольший общий делитель чисел $m, m_1, \ldots, m_n$.*

а) Если $d > 1$, то $\dim Y = m^n$. В частности, в этом случае все решения системы Меллина являются алгебраическими функциями.

б) Пусть $d = 1$. Тогда $\dim Y = m^n - m^{n-1} + 1$ при $m_1 = m - 1$ и $\dim Y = m^n - m^{n-1}$ во всех остальных случаях. Линейное пространство соотношений

$$R := \{c \in \mathbb{C}^{m^{n-1}} \,/\, \sum_{k=1}^{m^{n-1}} c^{(k)}(y_1^{(k)} + \cdots + y_m^{(k)}) = 0\}$$

имеет размерность $\dim R = m^{n-1} - 1$ при $m_1 = m - 1$ и $\dim R = m^{n-1}$ во всех остальных случаях. Более того, для любого ненулевого $c \in R$ функция χ_c, заданная равенством (6), есть неалгебраическое решение системы Меллина, линейное пространство $S = \{\chi_c \,/\, c \in R\}$ имеет размерность $\dim S = \dim R$, сумма $S + Y$ является прямой и совпадает с линейным пространством решений системы Меллина.

в) Линейное пространство Y совпадает с пространством алгебраических решений системы Меллина.

г) Представление монодромии системы Меллина (3) всегда приводимо.

Схема доказательства. а) Вытекает из следствия и алгебраичности ряда (4).

б) Доказательство формулы для числа линейно независимых алгебраических решений системы Меллина опирается на доказательство теоремы 1 и подсчет количества мультииндексов $(\nu_1, \ldots, \nu_n) \in B$, таких, что соответствующий коэффициент $\varphi_{\nu_1,\ldots,\nu_n}$ ряда (4) обращается в нуль. Для доказательства того, что функция χ_c удовлетворяет системе Меллина, используется предложение 3.2 из [2].

в) Данное утверждение следует из б) и неалгебраичности функции χ_c при $c \in R$.

г) При $n > 1$ линейное пространство, натянутое на корни алгебраического уравнения (2) имеет размерность не больше m и, следовательно, является собственным инвариантным относительно действия монодромии подпространством пространства решений системы Меллина. Если $n = 1$ и $m_1 < m-1$, то по теореме 2.4 из [2] корни уравнения (2) порождают собственное инвариантное подпространство размерности $m - 1$. Наконец, в случае $n = 1$ и $m_1 = m-1$ функция x_1 порождает одномерное инвариантное подпространство в пространстве решений системы Меллина. $\square$

[1] И. М. Гельфанд, М. М. Капранов, и А. В. Зелевинский. Функциональный анализ и приложения. **23(2)** (1989), 12–26.

[2] E. Cattani, C. D'Andrea, and A. Dickenstein. Duke Math. J. **99** (1999), 179-207.

[3] Hj. Mellin. C.R. Acad. Sc. **172** (1921), 658-661.

[4] T. Sadykov. Math. Scand. **91** (2002), 127-149.

[5] B. Sturmfels. Discrete Math. **210**, no. 1-3 (2000), 171-181.