PRIMITIVA A LO LARGO DE UNA CURVA

ALICIA DICKENSTEIN

Abstract. En esta nota damos la demostración de la existencia y de la unicidad salvo constante de la primitiva de una función holomorfa f (de hecho, de la 1-forma $f(z)dz$) a lo largo de una curva.

Comencemos recordando la definición.

Definición 1. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa y $\gamma : I = [0,1] \to U$ una curva (continua). Una primitiva de f a lo largo de γ es una función continua $\varphi : I \to \mathbb{C}$ tal que existe una partición*

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < t_n = 1$$

del intervalo I, abiertos $B_i \subseteq U$ y primitivas $F_i : B_i \to \mathbb{C}$ de f en cada B_i (es decir, F_i es holomorfa en B_i y su derivada es igual a f), tales que $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset B_i$ y

$$\varphi(t) = F_i(\gamma(t)) \quad \forall\, t \in [t_{i-1}, t_i], \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Teorema 2. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa y $\gamma : I \to U$ una curva. Entonces*

(a) *Existe $\varphi : I \to \mathbb{C}$ primitiva de f a lo largo de γ.*
(b) *Si $\varphi_1, \varphi_2 : I \to \mathbb{C}$ son dos primitivas de f a lo largo de γ, existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) + c$ para todo $t \in I$.*

Nota 3. Siempre que hablemos de un abierto alrededor de los puntos $0, 1$ de I, nos referimos a un abierto relativo a I, o sea a la intersección de un abierto de $\mathbb{R}$ con el cerrado I.

Proof. Comencemos demostrando (a). Dado $t \in I$, $\gamma(t) \in U$, que es abierto. Por lo tanto existe una bola abierta $B_t \subseteq U$ alrededor de $\gamma(t)$ y una primitiva F_t de f en B_t (dado que toda función holomorfa tiene primitiva en una bola). Por la continuidad de γ, existe un entorno abierto V_t del punto t tal que $\gamma(V_t) \subseteq B_t$.

Como $(V_t)_{t \in I}$ es un cubrimiento abierto del compacto I, por el lema del cubrimiento de Lebesgue existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que todo subconjunto de I con diámetro a lo sumo ε_0 está contenido totalmente en algún V_t. Tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \varepsilon_0$ y consideremos la partición de I dada por $t_i = i/n$, $i = 0, \ldots, n$. Como cada segmento $I_i = [t_{i-1}, t_i]$ tiene diámetro $1/n$, existe una bola abierta $B_i \subseteq U$ tal que $\gamma(I_i) \subseteq B_i$ y una primitiva G_i de f en B_i, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Definimos φ del siguiente modo:

- Llamamos $F_1 = G_1$ y para todo $t \in I_1$, definimos $\varphi(t) = G_1(\gamma(t))$.
- Llamamos $F_2 = G_2 + \varphi(t_1) - G_2(\gamma(t_1))$. Como F_2 difiere de G_2 en una constante, $F_2'(z) = f(z)$ para todo $z \in B_2$, es decir que es otra primitiva de f en B_2. Para todo $t \in I_2$, definimos $\varphi(t) = F_2(\gamma(t))$. Notar que esta definición coincide con la anterior en el punto $t_1 \in I_1 \cap I_2$.
- Llamamos $F_3 = G_3 + \varphi(t_2) - G_3(\gamma(t_2))$. Para todo $t \in I_3$, definimos $\varphi(t) = F_3(\gamma(t))$. Notar que esta definición coincide con la anterior en el punto $t_2 \in I_2 \cap I_3$.

E iteramos estas definiciones similarmente hasta llegar al intervalo I_n.

Como $\varphi_{|I_i} = F_i \circ \gamma$, φ es continua en cada $I_i, i = 1, \ldots, n$, pero como las definiciones "se pegan" en cada $t_i, i = 1, \ldots, n-1$, φ está bien definida y resulta continua en todo I.

Demostremos entonces (b). Supongamos que $\varphi_1, \varphi_2 : I \to \mathbb{C}$ son dos primitivas de f a lo largo de γ. Podemos suponer que para algún n suficientemente grande, la partición dada por $t_i = i/n, i = 0, \ldots, n$ está adaptada a φ_1 y φ_2 de acuerdo a la definición 1, porque es fácil ver que si φ verifica la definición para una partición dada, también la verifica para toda partición que la refine. Afirmamos que para todo punto $t \in I$ existe un entorno abierto V_t de t tal que $\gamma(V_t) \subseteq B_t$, donde B_t es una bola abierta contenida en U, y dos primitivas $F_{t,1}$ y $F_{t,2}$ de f en B_t tales que

$$\varphi_j(s) = F_{t,j}(\gamma(s)), \forall\, s \in V_t,\ j = 1, 2. \tag{1}$$

En efecto, esto es claro si $t \neq t_1, \ldots, t_{n-1}$. Supongamos que $t = t_i$ para algún $i = 1, \ldots, n-1$; como $\gamma(t_i) \in B_i$ que es abierto, existe $\varepsilon < 1/n$ tal que $\gamma(t_i - \varepsilon, t_i + \varepsilon) \subseteq B_i$ y por lo tanto podemos tomar $V_t = (t_i - \varepsilon, t_i + \varepsilon)$ y $B_{t_i} = B_i$.

Entonces, para cada t, como la bola B_t es conexa, existe una constante $c_t \in \mathbb{C}$ tal que $F_{t,1}(z) = F_{t,2}(z) + c_t$ para todo $z \in B_t$. Por lo tanto, deducimos de (1) que $\varphi_1(s) = \varphi_2(s) + c_t$ para todo $s \in V_t$, es decir que la función diferencia $\varphi := \varphi_1 - \varphi_2$ es continua y localmente constante en el conexo I, y por lo tanto es constante en I, como queríamos demostrar. $\square$

Nota 4. Para demostrar que una función φ en el conexo I que es localmente constante (es decir tal que para todo punto existe un entorno abierto en el cual la restricción de la función es constante), es constante en I, basta observar que si en el entorno abierto $V_{\bar{t}}$ de algún punto $\bar{t}$, se tiene que $\varphi(s) = \bar{c}$ para todo $s \in V_{\bar{t}}$, entonces el subconjunto de I definido por

$$\Gamma := \{t \in I \,:\, \varphi(t) = \bar{c}\,\}$$

es cerrado (porque φ es continua), abierto (ya que se sigue inmediatamente de la definición) y no vacío porque $\bar{t} \in \Gamma$, y por lo tanto $\Gamma = I$, es decir que φ es la función constante $\bar{c}$ en I.