Práctica para entregar - Versión completa

1. Sean $f_1 = x^3 + y^3,\ f_2 = x^4 + y^4$ e $I =< f_1, f_2 >$.

a) Encontrar $V(I)$.

b) Probar que $\{f_1, f_2\}$ no es GB para ningún orden monomial.

c) Encontrar la dimensión y una base del cociente $\mathbb{C}[x, y]/I$.

2. Sea $I \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal con finitos ceros complejos y $f = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ lineal.

a) Encontrar un algoritmo que verifique si f separa puntos de $V(I)$, a partir de un sistema dado de generadores de I.

b) Aplicando ese algoritmo, encontrar todas las f lineales que separan los puntos de $V(I)$ para $I =< x^3 + y^5, x^2 - 2y^2 >$.

3. Sea $I \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal con finitos ceros complejos y $h \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ que no se anula en ningún cero de I.

a) Encontrar un algoritmo que, a partir de generadores de I, calcule un polinomio g tal que $h \cdot g - 1 \in I$, o sea tal que la clase de g sea el inverso respecto del producto de la clase de h en el cociente $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I$.

b) Encontrar g en el siguiente caso: $I =< x(x-1), y(y-1) >, t(x, y) = x + 2y,\ f(T) \in \mathbb{C}[T]$ el polinomio característico de la multiplicación por t en $\mathbb{C}[x, y]/I$, $h(x, y) = f'(t)$. Comprobar que g no es de la forma $F(t)$ para ningún polinomio univariado F.

4. Consideremos un sistema polinomial con finitos ceros $V = A \cup B$, donde todos los puntos en A tienen al menos dos coordenadas iguales y todos los puntos de B tienen todas las coordenadas distintas. Encontrar un algoritmo que calcule ecuaciones cuyos ceros sean exactamente B a partir de los polinomios dados que definen V.

5. Dados dos enteros positivos m, n encontrar un ideal radical explícito I y un orden monomial $\prec$ tal que $LT_{\prec}(I) =< x_1, \ldots, x_n >^m$ (no es fácil).

6. Consideremos los ideales $I_t =< y - x^2, x^3 - t >$ en $\mathbb{C}[x, y]$, donde $t \in \mathbb{C}$ es un parámetro.

a) ¿Cuáles son los puntos de $V(I_t)$ para $t \neq 0$? Mostrar que cada punto tiene multiplicidad 1; por lo tanto A_i es isomorfo a $\mathbb{C}$ para cada i.

b) Calcular $V(I_0)$ y las multiplicidades en este caso.

c) ¿ Adónde tienden los puntos de $V(I_t)$ cuando $t \to 0$?

7. Sea $I \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal con finitos ceros complejos y $h_i(T)$ el polinomio minimal de la multiplicación m_{x_i} por x_i en el cociente por I.

a) Demostrar que $h_i(x_i)$ es el generador mónico de $I \cap \mathbb{C}[x_i]$.

b) Probar que I es radical si y sólo si las matrices de $m_{x_1}, \ldots, m_{x_m}$ (en alguna base) son diagonalizables.

8. Sea $I \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal con finitos ceros complejos $\{p_1, \ldots, p_d\}$. Denotemos por $\mathcal{M}_i$ el ideal maximal asociado a p_i, es decir todos los polinomios que se anulan en p_i. Probar que existe un número natural N tal que la intersección $\cap_{i=1}^{d} \mathcal{M}_i^N$ está contenida en I.

9. Sea $f(x) = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$.

a) Probar que si $x_0 \in \mathbb{R}$ es una raíz de f, entonces $|x_0| \leqslant B$, donde $B = 1 + \text{máx}\{|a_{d-1}|, \ldots, |a_0|\}$.

b) Dar un algoritmo que a partir de los coeficientes de f permita decidir si $f(x) \geqslant 0$ para todo número real positivo x.

10. Hacer el Tutorial 26: Graph Colourings, de la página 143 del libro de Kreuzer y Robbiano (les adjunté fotocopia una clase; si no la encuentran, les paso otra copia). Donde pide un programa en CoCoa, pueden o bien no hacerlo si no les atrae, o bien hacerlo en Singular, Maple, etc.

11. Sea $I \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal con finitos ceros complejos $V(I) = \{p_1, \ldots, p_d\}$. Para cada $i = 1, \ldots, d$, llamemos

$$I_i := \{f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \ : \ \exists g \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n], g(p_i) \neq 0 \text{ and } \ g \cdot f \in I\}.$$

Probar que:

a) I_i es un ideal. ¿ Cuál es el radical de I_i?

b) Dado un ideal M y $k \in \mathbb{N}$, se nota

$$(I : M^k) = \{f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \ : \ f \cdot g \in I \, \forall g \in M^k\},$$

el ideal cociente o transportador (o "colon ideal") de M^k en I y

$$(I : M^\infty) = \{f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \ : \ f \cdot g \in I \, \forall g \in M^r, \text{ para algún } \ r\}$$

la "saturación" $(I : M^\infty) = \cup_{k \in \mathbb{N}} (I : M^k)$.

i) Probar que $(I : M^\infty)$ es un ideal.

ii) Probar que si M es el maximal en un punto p_i de $V(I)$ entonces $V((I : M^\infty)) = V(I) \setminus \{p_i\}$ y que $I_i = (I : (I : M^\infty))$.

iii) Probar que si existe $f \in (I : M^k)$ tal que $f(p_i) \neq 0$, entonces $(I : M^\infty) = (I : M^k)$.

c) Si se conocen explícitamente las coordenadas de un cero p_i de I, dar un algoritmo para calcular I_i (sug: vimos en la clase cómo calcular ideales transportadores e intersección de ideales; pueden encontrar esto en los ejercicios de la primera sección del primer capítulo del libro *Using Algebraic Geometry*).

12. Hacer los tres ejercicios de la práctica de Singular.