ECUACIONES POLINOMIALES Y ALGORITMOS II

Segundo Cuatrimestre 2012– Práctica 4

(**1**) Consideremos los ideales $I_t =< y - x^2, x^3 - t >$ en $\mathbb{C}[x, y]$, donde $t \in \mathbb{C}$ es un parámetro.
(a) Probar que para todo t, las clases de $1, x, x^2$ son una base del cociente por I_t.
(b) ¿Cuáles son los puntos de $V(I_t)$ para $t \neq 0$? Mostrar que todas las multiplicidades son 1.
(c) Calcular $V(I_0)$ y las multiplicidades en este caso.
(d) ¿Adónde tienden los puntos de $V(I_t)$ cuando $t \to 0$?
(e) ¿Qué sucede si consideramos en cambio la familia de ideales $J_t =< y - x^2, tx^3 - x >$?

(**2**) Sea k un cuerpo alg. cerrado e $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal con finitos ceros $\{p_1, \ldots, p_\ell\}$. Denotemos por $\mathfrak{M}_i$ el ideal maximal asociado a p_i, es decir todos los polinomios que se anulan en p_i. Probar que existe un número natural d tal que la intersección $\cap_{i=1}^{\ell} \mathfrak{M}_i^d$ está contenida en I. (Sugerencia: probar que existe d tal que $\left(\cap_{i=1}^{\ell} \mathfrak{M}_i\right)^d \subset I$ y usar que para todo $i \neq j$ vale que $\mathfrak{M}_i + \mathfrak{M}_j = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$)

(**3**) Sea $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal propio con finitos ceros y supongamos que x_n separa puntos de I, es decir que si $V_{\overline{k}}(I) = \{p_1, \ldots, p_\ell\}$, entonces las últimas coordenadas de estos ℓ puntos son todas distintas. Sea G la base de Gröbner reducida de I con respecto al orden lexicográfico $x_n \prec \cdots \prec x_2 \prec x_1$.
(a) Explicar por qué existe un único elemento $g(x_n)$ de G que solo depende de x_n. Probar que $\langle g \rangle = I \cap k[x_n]$.
(b) Consideremos la factorización de g:

$$g(x_n) = \prod_{i=1}^{\ell} (x_n - x_n(p_i))^{m_i}.$$

¿ Por qué la factorización tiene esta forma?
(c) Probar que $I = \cup_{i=1}^{\ell} I + \langle (x_n - x_n(p_i))^{m_i} \rangle$.
(d) Probar que $I + \langle (x_n - x_n(p_i))^{m_i} \rangle$ es la componente primaria de I en p_i.
(e) Para cada $n \in N$ consideremos el ideal $I_n := \langle x_1^5(x_1 - 1)^4, (x_1 - x_2)^n, x_2^2(x_2 - 1)^3 \rangle$. Probar que tanto x_1 como x_2 separan puntos de I_n. Verificar que las multiplicidades $m_n(0, 0)$ y $m_n(1, 1)$ de I_n son iguales a

n	$m_n(0,0)$	$m_n(1,1)$
1	2	3
2	4	6
3	6	8
4	8	10
5	9	11
≥ 6	10	12.

(f) Deducir que no pueden determinarse las multiplicidades solo a partir del polinomio g_n. ¿Qué puede decirse si $\dim k[x_1, \ldots, x_n]/I = \deg(g_n)$?