ECUACIONES POLINOMIALES Y ALGORITMOSII

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2012– PRÁCTICA 3

(**1**) Dados $f, g \in k[x]$ de grados respectivos $m \leq n$, consideramos el polynomio en $k[x, y]$ definido por $Bez_{fg}(x, y) = \frac{f(x)g(y)-f(y)g(x)}{x-y} = \sum_{i,j=0,\ldots,n-1} b_{ij}x^iy^j$ y llamamos $B_{f,g} = (b_{ij}) \in k^{n\times n}$.
 (a) Probar que (la matriz Bezoutiana) B_{fg} es una matriz simétrica.
 (b) Probar que la matriz $B_{1,g}$ es inversible para todo g de grado n.
 (c) Probar que la matriz $[m_f]_{\mathcal{B}}$ de multiplicación por f en el cociente $k[x]/\langle g\rangle$, en la base $\mathcal{B} = \{1, x, \ldots, x^{n-1}\}$ de monomios, es igual a

$$[m_f]_{\mathcal{B}} \;=\; B_{fg}B_{1g}^{-1}. \quad (\diamond)$$

(**2**) Con las mismas notaciones del ejercicio anterior, ¿según lo visto en la teórica, cuál es el rango de $[m_f]_{\mathcal{B}}$? Usar esto y la igualdad $(\diamond)$ para demostrar que el rango de B_{fg} es igual a n menos el grado del máximo común divisor $\gcd(f, g)$.

(**3**) Let $p, q \in \mathbb{Q}[x]$ con grados respectivos n, m y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tales que $p(\alpha) = q(\beta) = 0$. Probar que:
 (a) $\alpha + \beta$ es raíz del polinomio $u_+(y) := \mathrm{Res}_{mn}(p(y - x), q(x), x)$.
 (b) $\alpha \cdot \beta$ es raíz del polinomio $u_\times(y) := \mathrm{Res}mn(y^m p(y/x), q(x), x)$.
 (c) Si $\alpha \neq 0$, $1/\alpha$ es raíz del polinomio $u_{-1}(y) := \mathrm{Res}(1m)(yx - 1, p(x), x)$. Probar que p es irreducible sobre $\mathbb{Q}$ si y solo si u_{-1} es irrreducible sobre $\mathbb{Q}$.
 (d) Encontrar p, q irreducibles sobre $\mathbb{Q}$ de grado 3 tales que $u_\times$ no sea irreducible.