ECUACIONES POLINOMIALES Y ALGORITMOSII

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2012– PRÁCTICA 2

1. Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado e $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal de dimension cero. Sea $g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ un polinomio que no se anula en ninguno de los ceros del ideal. Vimos en la teórica que entonces la clase $\overline{g}$ de g en el cociente A por I es inversible, es decir, existe un polinomio h tal que $\overline{h} \cdot \overline{g} = \overline{1}$ en A. Proponer un algoritmo para encontrar h efectivamente, a partir de g y del dato de finitos generadores de I. ¿Es h único?

2. Sea V un conjunto finito en k^n de cardinal N. Consideremos el siguiente conjunto de formas lineales

$$\mathcal{T} = \{f_i = x_1 + ix_2 + i^2x_3 + \ldots, i^{n-1}x_n, \quad 0 \leq i \leq (n-1)\binom{N}{2}\}.$$

Probar que existe al menos una forma lineal en $\mathcal{T}$ que separa puntos de V (es decir, que f_i toma valores distintos en puntos distintos de V). Este es un lema de Fabrice Rouillier.

3. Sea $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal de dimension cero y radical y $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Probar que f separa puntos de V si y solo si el polinomio característico χ_{m_f} de la multiplicación por f en el cociente por I tiene todas sus raíces simples. Proponer un algoritmo, dado f y generadores de un ideal J de dimension cero, que chequee si f separa puntos de J.