$\boxed{\textbf{ECUACIONES POLINOMIALES Y ALGORITMOSII}}$

Segundo Cuatrimestre 2012– Práctica 1

1. Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado e $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal. Probar que I tiene un cero en $(k^*)^n$ si y solo si no contiene ningún monomio.

2. Consideremos el ideal $I_1 := \langle x_1 \ldots x_n y - 1 \rangle \subset k[x_1, \ldots, x_n, y]$ y denotemos el cociente por $A_1 := k[x_1, \ldots, x_n, y]/I_1$. Por otro lado, consideremos el ideal $I_2 := \langle x_1 y_1 - 1, \ldots, x_n y_n - 1 \rangle \subseteq k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$ y denotemos el cociente por $A_2 := k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]/I_2$. Probar que A_1 y A_2 son anillos isomorfos (exhibiendo un isomorfismo explícito). Probar que son isomorfos al anillo de polinomios de Laurent

$$A := k[x_1, \ldots, x_n, x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1}] = \{ f = \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma x^\gamma,\ a_\gamma \in k,\ \Gamma \subset \mathbb{Z}^n \text{ finito } \}$$

.

3. Consideremos un ideal binomial $I = \langle x^{\alpha_1} - x^{\beta_1}, \ldots, x^{\alpha_n} - x^{\beta_n} \rangle \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ y supongamos que el valor absoluto del determinante δ de la matriz cuadrada $n \times n$ con columnas $\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_n - \beta_n$ es no nulo. Probar que si k es algebraicamente cerrado, I tiene (exactamente) δ ceros distintos en $(k^*)^n$. Mostrar un ejemplo en el cual $\delta \neq 0$ pero I tiene infinitos ceros en k^n.