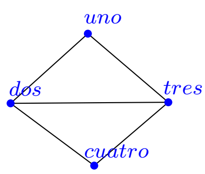
ECUACIONES POLINOMIALES Y ALGORITMOSII

Segundo Cuatrimestre 2012– Práctica 0

Los dos últimos ejercicios son para que los intenten hacer solo los que **no** rindieron final **escrito** de ECyA en el segundo cuatrimestre del 2011. El ejercicio (2) responde a la pregunta de Laura en la primera clase: Es posible testear algorítmicamente si un ideal (presentado por un sistema finito de generadores) es binomial o no.

(**1**) Un k-coloreo de un grafo $G = (V, E)$ es una asignación de colores (tomados entre k colores) a los vértices de un grafo de modo que nunca dos vértices unidos por una arista tengan el mismo color. Claramente, todo grafo con m aristas admite un m-coloreo. El siguiente gráfico muestra un 4-coloreo de un grafo con 4 nodos y 5 aristas, con colores llamados (igual que los nodos correspondientes) uno, dos, tres y cuatro.



El problema de encontrar todos los k-coloreos de un grafo dado G con n nodos (numerados) y m aristas se puede reducir a encontrar todas las soluciones de un sistema de ecuaciones polinomiales de la siguiente manera. Usamos como colores las raíces k-ésimas de la unidad y representamos los colores asignados al i-ésimo vértice con las soluciones de $p_i^k = x_i^k - 1 = 0$, para cada $i = 1, \ldots, n$. El hecho que $x_i \neq x_j$ si existe una arista entre los nodos i y j, puede traducirse en que se satisfaga la ecuación $q_{ij}^k = x_i^k - x_j^k / x_i - x_j$ (que es un polinomio!). Es decir que en total tenemos $n + m$ polinomios. Notemos por I_G^k al ideal que generan:

$$I_G^k = \langle p_1^k, \ldots, p_n^k, \, q_{ij}^k \text{ para toda arista } \{i, j\} \rangle.$$

Por ejemplo, en el ejemplo anterior, todos los 3-coloreos están representados por los ceros del ideal I_G^3:

$$x_1^3 - 1 = 0, x_2^3 - 1 = 0, x_3^3 - 1 = 0, x_4^3 - 1 = 0,$$
$$x_1^2 + x_2x_1 + x_2^2 = 0, x_1^2 + x_3x_1 + x_3^2 = 0, x_2^2 + x_3x_2 + x_3^2 = 0,$$
$$x_2^2 + x_4x_2 + x_4^2 = 0, x_3^2 + x_4x_3 + x_4^2 = 0.$$

Una solución es por ejemplo $(\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon)$, donde ε es una raíz cúbica primitiva de la unidad. ¿Cuántas soluciones hay?

En este caso es fácil hacerlo a mano, pero ¿cómo podrían contarse las soluciones con (una implementación) de bases de Gröbner?

¿Cómo puede comprobarse con bases de Gröbner si un grafo (finito) dado admite un k-coloreo? (como comenté en clase, esto no es eficiente en general).

(**2**) Recordemos que polinomio f es un *binomio* si $f = ax^\alpha + bx^\beta$ (con $a, b \in k$) tiene (a lo sumo) dos términos y que un ideal es binomial si tiene un sistema de generadores que consiste de binomios.

(a) Sean f, g dos binomios en $k[x_1, \ldots, x_n]$. Probar que $S(f, g)$ también es un binomio (la definición del S-polinomio puede encontrarse por ejemplo en la página 11 de mis notas `http://mate.dm.uba.ar/ alidick/papers/uma95.pdf`.

(b) Sea $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal, $\prec$ un orden monomial y G una base de Gröbner reducida para I respecto de $\prec$. Probar que I es un ideal binomial si y solo si todos los elementos de G son binomios.

(**3**) Sean $f_1 = x^4 + y^4, f_2 = x^3 + y^3$ e $I = \langle f_1, f_2 \rangle \subset \mathbb{C}[x, y]$.

(a) Probar que $F = \{f_1 f_2\}$ no es una base de Gröbner para ningún órden monomial.

(b) Encontrar $V_{\mathbb{C}}(I)$, calcular $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x, y]/I$ y encontrar una base del cociente.

(c) Es I radical?

(d) Existen naturales m, n tales que $x^m, y^n \in I$?