ECUACIONES POLINOMIALES Y ALGORITMOS

Segundo Cuatrimestre 2011– Práctica 8

Aplicaciones

En algunos ejercicios, conviene usar Singular.

(1) Sean A, B, C, D, E, F puntos en el plano. Denotamos con $\overline{AB}$ el segmento por los puntos A, B, etc. Expresar como la anulación de una o más ecuaciones polinomiales las siguientes afirmaciones:
(a) $\overline{AB}$ es paralelo a $\overline{CD}$.
(b) $\overline{AB}$ es perpendicular a $\overline{CD}$.
(c) A, B y C son colineales
(d) C vive en el círculo de centro A y radio $|A - B|$.
(e) Los ángulos agudos $\angle(ABC)$ y $\angle(DEF)$ son iguales (Sug: Usar que dos ángulos agudos son iguales si y solo si tienen la misma tangente)
(f) El segmento $\overline{BD}$ bisecta el ángulo $\angle(ABC)$.

(2) Sea $\Delta(A, B, C)$ el triángulo por los puntos A, B, C del plano. Escribir como ecuaciones polinomiales las hipótesis y la tesis del siguiente teorema elemental: las alturas correspondientes a los tres lados de $\Delta(A, B, C)$ se cortan en un punto H. Demostrar el teorema usando bases de Gröbner.

(3) (a) Sean $h_1, \ldots, h_r \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ y $g \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ tal que g se anula en todos los ceros complejos V del ideal $J = \langle h_1, \ldots, h_r\rangle$. Probar que existen $m \in \mathbb{N}$ y $A_1 \ldots, A_r$ con coeficientes reales tales que $g^m = \sum_{i=1}^{r} A_i h_i$ (o sea, g está en el radical de J en $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$.)
(b) Supongamos que existen dos variedades algebraicas $V_1, V_2 \subset \mathbb{C}^{m+n}$ tales que $V = V_1 \cup V_2$ y supongamos existe un polinomio no nulo $c(x_1) \in I(V_1) \cap \mathbb{C}[x_1]$. Sea $\bar{c}$ el polinomio obtenido tomando el conjugado de todos los coeficientes de c y $p = c\bar{c}$. Probar que $p \in I(V_1) \cap \mathbb{R}[x_1]$.
(c) Deducir que un polinomio $g \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ verifica que pg está en el radical de J en $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ si y solo si g se anula en V_2.

(4) Consideremos el polinomio $f = (x^2 + y^2)(x^2 + z^2)(y^2 + z^2)$. Escribirlo como un polinomio en las funciones simétricas elementales de (x, y, z).

(5) Sea f un polinomio homogéneo de grado ℓ en n variables.
(a) Probar que f se puede escribir como combinación lineal con coeficientes constantes de polinomios de la forma $\sigma_1^{i_1} \ldots \sigma_n^{i_n}$ con $i_1 + 2i_2 + \ldots ni_n = \ell$.
(b) Sea n el máximo grado de x_1 que aparece en f (por simetría éste es el grado máximo en cualquier variable). Si $\sigma_1^{i_1} \ldots \sigma_n^{i_n}$ aparece en la expresión de f del ítem anterior, probar que $i_1 + i_2 + \ldots i_n \leq m$.

(6) Consideremos el polinomio f en n variables $x_1, \ldots, x_n$ dado por $f = \sum_{i \neq j} x_i^2 x_j$. Probar que $f = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$. Notar que esto no puede demostrarse con una computadora.