ECUACIONES POLINOMIALES Y ALGORITMOS

Segundo Cuatrimestre 2011– Práctica 6

Anillos cociente e ideales con finitos ceros

Definición: Sea K un cuerpo, $\overline{K}$ su clausura algebraica e $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ un ideal. Decimos que I es de dimension cero si tiene finitos ceros en $\overline{K}^n$.

En algunos ejercicios, conviene usar Singular.

(**1**) Sea $f(X) = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i) \in K[X]$ con $\alpha_i \in K$ todos distintos. Se define $g_i := \prod_{j \neq i}(X - \alpha_j)$, $1 \leq i \leq n$.
- Probar que $\{ \overline{g_1}, \dots, \overline{g_n} \}$ es una base de $K[X] \,/\, \langle f \rangle$.
- Dado $g \in K[X]$, determinar las coordenadas λ_i de $\overline{g} \in K[X] \,/\, \langle f \rangle$ en la base $\{ \overline{g_1}, \dots, \overline{g_n} \}$, y relacionar esto con la interpolación de Lagrange.

(**2**) Sea $f(X) = a_n X^n + \cdots + a_0 \in K[X]$ con $a_n \neq 0$. Se puede escribir :

$$\begin{aligned} f(X) &= (a_n X^{n-1} + \cdots + a_1)X + a_0 \\ &= ((a_n X^{n-2} + \cdots + a_2)X + a_1)X + a_0 \\ \cdots &= ((\dots((a_n X + a_{n-1})X + a_{n-2})X + \dots)X + a_1)X + a_0. \end{aligned}$$

Es decir, si se define inductivamente $H_n = a_n, H_{n-1} = H_n X + a_{n-1}, H_{n-2} = H_{n-1}X + a_{n-2}, \dots, H_0 = H_1 X + a_0$, entonces, $H_0 = f$ y $\operatorname{gr}(H_{n-i}) = i \quad (0 \leq i \leq n)$.
- Probar que $\{ \overline{H_1}, \dots, \overline{H_n} \}$ es una base de $K[X] /, \langle f \rangle$. (Los polinomios H_i se llaman los polinomios de Horner, y satisfacen que calcular $H_{n-1}, \dots, H_0$ sucesivamente es la forma de evaluar un polinomio f general en 1 variable que usa la menor cantidad de productos).
- Sea $\mu_X : K[X] \,/\, \langle f \rangle \longrightarrow K[X] \,/\, \langle f \rangle$ la transformación lineal "multiplicar por X" en $K[X] \,/\, \langle f \rangle$, o sea $\mu_X(\overline{g}) = \overline{Xg}$.
  – Escribir la matriz de μ_X en la base $\{ H_n, \dots, H_1 \}$.
  – Determinar el polinomio característico de la transformación lineal μ_X.

(**3**) Probar que $\mathbb{R}[X] \,/\, \langle X^2 \rangle \longrightarrow \mathbb{R}^2 \;\; ; \;\; \overline{f} \mapsto (f(0), f'(0))$ es un isomorfismo de $\mathbb{R}-$espacios vectoriales.

(**4**) Probar que:
- $\mathbb{R}[X] \,/\, \langle X^2 + 1 \rangle$ y $\mathbb{C}$ son anillos (luego cuerpos) isomorfos.
- $K[X, Y] \,/\, \langle X \rangle$ y $K[Y]$ son anillos isomorfos.
- $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \,/\, \langle X_1, \dots, X_n \rangle$ y K son anillos (luego cuerpos) isomorfos.

(**5**) Sea $I = \langle XY + Z - XZ, X^2 - Z, 2X^3 - X^2YZ - 1 \rangle \subset \mathbb{Q}[X, Y, Z]$. Determinar si I es cero-dimensional y en caso afirmativo calcular $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(I)$.

(**6**) Sea $I = \langle Y + X^2 - 1, XY - 2Y^2 + 2Y \rangle \subset \mathbb{R}[X, Y]$.
- Determinar una base del $\mathbb{R}-$espacio vectorial $\mathbb{R}[X, Y] \,/\, I$.
- Determinar un isomorfismo entre $\mathbb{R}[X, Y] \,/\, I$ y $\mathbb{R}^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.
- Escribir la tabla de multiplicación de los elementos de la base hallada (que determina la multiplicación del anillo $\mathbb{R}[X, Y] \,/\, I$) y decidir si $\mathbb{R}[X, Y] \,/\, I$ es un cuerpo.

(7) Sea $I = \langle X^2+Y^5, X^3+Y^4\rangle \subset \mathbb{C}[X,Y]$. Decidir si los siguientes pares de polinomios determinan la misma clase en $\mathbb{C}[X,Y]\,/\,I$: XY y 1, XY^5 e Y^4, Y^4 y $-X^4Y$, y $5X^2+7Y^2$ y $5Y^2+7X^2$.

(8) Sea $I = \langle X^4Y - Z^6, X^2 - Y^3Z, X^3Z^2 - Y^3\rangle \subset K[X,Y,Z]$. Determinar una base del $K-$espacio vectorial $K[X,Y,Z]\,/\,I$.

(9) Sea $I = \langle XY^4 - Y^4 + 3X^3 - 3X^2, X^2Y - 2X^2, 2XY^4 - 2Y^4 - X^3 + X^2\rangle \subset \mathbb{C}[X,Y]$. Calcular $\sqrt{I}$.

(10) Sea $I \subset K[X_1,\dots,X_n]$ un ideal cero-dimensional y $\overline{K}$ la clausura algebraica de K. Probar que

$$\#\mathbf{V}_{\overline{\mathbb{K}}}(I) \;=\; \dim_K K[X_1,\dots,X_n]/\sqrt{I}.$$

(11) Sea K un cuerpo infinito y sea $V \subset K^n$ una variedad tal que existen polinomios en $f_1, f_2, f_3 \in K[T]$ que satisfacen

$$V = \{(f_1(t), f_2(t), f_3(t)),\ t \in k\}.$$

(Este es un ejemplo de una curva definida paramétricamente.)

- Observar que si $F : K \to K^3$ está definida como $F(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$, entonces $V = F(K)$, y probar que $\mathbf{I}_K(V) = \{g \in K[X,Y,Z] \;:\; g\circ F = 0\}$ donde $g\circ F$ es el polinomio que consiste en reemplazar en g las variables X,Y,Z por los polinomios $f_1(T), f_2(T), f_3(T)$ respectivamente.
- Probar que $\mathbf{I}_K(V)$ es un ideal primo.

Concluir que entonces V es irreducible.

(12) Sea $I = \langle XZ - Y^2, X^3 - YZ\rangle \subset \mathbb{C}[X,Y,Z]$.

- Aplicar el teorema de extensión para calcular $V := \mathbf{V}_{\mathbb{C}}(I)$ (con $Z > Y > X$).
- Probar que V es la unión de dos componentes irreducibles: $V_1 = \mathbf{V}_{\mathbb{C}}(X,Y)$ y $V_2 = \mathbf{V}_{\mathbb{C}}(XZ - Y^2, X^3 - YZ, X^2Y - Z^2)$ (Sug: para probar que V_2 es irreducible, probar que V_2 es una curva parametrizable como en el ejercicio anterior.)