$\boxed{\textbf{ECUACIONES POLINOMIALES Y ALGORITMOS}}$

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2011– PRÁCTICA 6

<u>Variedades algebraicas e ideales radicales</u>

En algunos ejercicios, conviene usar Singular.

(1) Probar que $\mathbf{I}_K(\mathbf{V}_K(x-y)) = \langle x-y\rangle$ para todo cuerpo K.

(2) Sea $I \subset \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$ un ideal. Probar que siempre existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para **todo** $f \in \sqrt{I}$, se tiene que $f^{N_0} \in I$.

(3) Determinar si $X+Y \in \sqrt{\langle X^3, Y^3, XY(X+Y)\rangle}$ y si $X^2+3XZ \in \sqrt{\langle X+Z, X^2Y, X-Z^2\rangle}$. En caso afirmativo, ¿ a qué potencia hay que elevar los polinomios para meterlos en los ideales ?

(4) Probar que $\langle XY, XZ, YZ\rangle$ es un ideal radical.

(5) Probar que en $K[X,Y]$, $\sqrt{\langle X^2, Y^3\rangle} = \langle X, Y\rangle$, e $\mathbf{I}_K(\mathbf{V}_K(X^2,Y^3)) = \langle X,Y\rangle$.

(6) Si f, g son dos polinomios no constantes, ¿ es necesariamente cierto que $\sqrt{\langle f^2, g^3\rangle} = \langle f, g\rangle$? ¿ Y si más aún f y g no tienen factores múltiples ?

Sea $I = \langle x^2+y^2-1, y-1\rangle \subset \mathbb{C}[x,y]$. Hallar $f \in \mathbf{I}_{\mathbb{C}}(\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(I))$ tal que $f \notin I$. ¿ Es I un ideal radical?

(7) Sean $f = x^2 - 2xy + y^2 + x^3$, $g = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 + y^4$. Se trata de dos polinomios irreducibles. Es radical el ideal $\langle f, g\rangle$? (sugerencia: calcular una base de Groebner para un orden lexicográfico).

(8) Comparar $\mathbf{I}_{\mathbb{C}}(\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(x^2+y^2+1))$ con $\sqrt{\langle x^2+y^2+1\rangle} \subset \mathbb{C}[X,Y]$. Idem para $\mathbf{I}_{\mathbb{R}}(\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(x^2+y^2+1))$ con $\sqrt{\langle x^2+y^2+1\rangle} \subset \mathbb{R}[X,Y]$.

(9) Sea $I = \langle XY, (X-Y)X\rangle \in \mathbb{C}[X,Y]$. Describir $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(I)$ y $\sqrt{I}$.

(10) Sea $I = \langle X^2+Y^2+Z^2-1, X^2+Z^2-Y, X-Z\rangle \subset \mathbb{C}[X,Y,Z]$.
- Describir $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(I)$.
- ¿ Es I un ideal radical ?

(11) Consideremos el sistema de ecuaciones dado por :

$$\begin{cases} X^5 + 1/X^5 = Y \\ X + 1/X = Y \end{cases}$$

- Determinar un ideal $I \subset \mathbb{C}[X,Y,Z]$ que "ayude" para resolver este sistema, y encontrar sistemas de generadores de los ideales de eliminación $I \cap \mathbb{C}[Y,Z]$ e $I \cap \mathbb{C}[Z]$.
- Aplicar el teorema de extensión para decidir cuáles $c \in \mathbf{V}_{\mathbb{C}}(I \cap \mathbb{C}[Z])$ se extienden a $(a,b,c) \in \mathbf{V}_{\mathbb{C}}(I)$.

- ¿ Cuáles soluciones $(b,c) \in \mathbf{V}_{\mathbb{C}}(I \cap \mathbb{C}[Y,Z])$ se extienden a soluciones $(a,b,c) \in \mathbf{V}_{\mathbb{C}}(I)$? ¿ Por qué no se contradice el teorema de extensión ?
- Resolver completamente el sistema original.

(**12**) Probar que en $\mathbb{R}$, $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(X^2+Y^2)$ es finito y sin embargo, $\langle X^2+Y^2\rangle \cap \mathbb{R}[X] = (0)$ y $\langle X^2+Y^2\rangle \cap \mathbb{R}[Y] = (0)$. ¿ Dónde falla el razonamiento hecho para $\mathbb{C}$?