ECUACIONES POLINOMIALES Y ALGORITMOS

Segundo Cuatrimestre 2011– Práctica 4

Para hacer con Singular u otro CAS

(**1**) Usando órdenes lexicográficos puros, determinar exactamente los puntos complejos de las variedades $V(X^2+Y^2+Z^2-1, X^2+Y^2+Z^2-2X, 2X-3Y-Z)$ y $V(X^2Y-Z^3, 2XY-4Z-1, Z-Y^2, X^3-4YZ)$.

(**2**) Encontrar todas las soluciones racionales del sistema $x^2+y^2+z^2-4 = x^2+2y^2-5 = xz-1 = 0$. Tiene el sistema un número finito de soluciones complejas?

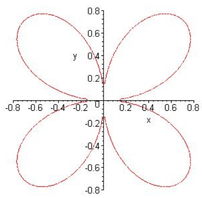
(**3**) Calcular usando el orden lexicográfico puro y el orden "grevlex" con $X > Y > Z$ bases de Gröbner de los ideales $< X^5+Y^4+Z^3-1, X^3+Y^2+Z^2-1 >$, $< X^5+Y^4+Z^3-1, X^3+Y^3+Z^2-1 >$, y comparar los tamaños.
¿ Qué se observa ?

(**4**) Sean a, b, c tales que $a+b+c = 3, a^2+b^2+c^2 = 5$ y $a^3+b^3+c^3 = 7$.
(a) Probar que $a^4+b^4+c^4 = 9$.
(b) Probar que $a^5+b^5+c^5 \neq 11$.
(c) Cuál es el valor de $a^5+b^5+c^5$? Explicar por qué se puede predecir de antemano que este valor será constante para tales a, b, c.

(**5**) Encontrar la ecuación implícita de la superficie parametrizada por

$$x = \frac{2u}{u^2+v^2+1} \quad y = \frac{2v}{u^2+v^2+1} \quad z = \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}.$$

(**6**) Sea C la flor en el plano descripta por la ecuación $r = |sin(2\theta)|$ en coordenadas polares.



Es cierto que el polinomio $p = x^7 - x^6y + 3x^5y^2 - 3x^4y^3 + y^6x - y^7 - 4x^3y^2 + 4x^2y^3 + 3x^3y^4 - 3x^2y^5$ se anula en todos los puntos de C?

(**7**) Sean $f_1 = x^3 - 2y^2$, $f_2 = 3x^6 + y^4$ y denotemos $J =< f_1, f_2 >\subset \mathbb{C}[x, y]$. Es cierto que el polinomio $x + y^2$ se anula en $V(J)$?