ECUACIONES POLINOMIALES Y ALGORITMOS II

Segundo Cuatrimestre 2012– Práctica 5

1. Dado un polinomio de Laurent no nulo h (en n variables), denotamos con $N(h)$ su polítopo de Newton. Un vértice $v \in N(f)$ es una cara de dimensión 0, es decir que existe un (co)vector η tal que el mínimo de los valores de la forma lineal $\langle m, \eta \rangle$ se alcanza en $N(h)$ exactamente en el punto v. Sean f, g dos polinomios de Laurent no nulos (en n variables).

(a) Probar que para todo vértice v de $N(f) + N(g)$ existen vértices v' de $N(f)$ y v'' de $N(g)$ tales que $v = v' + v''$. ¿Es cierto que si v' es un vértice de $N(f)$ y v'' un vértice de $N(g)$, entonces $v' + v''$ es vértice de $N(f) + N(g)$?

(b) Probar que $N(fg) = N(f) + N(g)$.

(c) ¿Cuál es la relación entre $N(x^\alpha f)$ y $N(f)$ para un monomio x^α?

2. Fijemos los grados $d_1 = d_2 = 1$ y sea $d_0 > 0$ arbitrario. Sea $F_0 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ un polinomio homogéneo de grado d_0 y F_1, F_2 las siguientes formas lineales genéricas

$$F_1(x) = a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2, \quad F_1(x) = b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2.$$

Llamemos Δ_{ij} al determinante $a_ib_j - a_jb_i$. Probar que la resultante homogénea $\mathrm{Res}_{d_0,1,1}(F_0, F_1, F_2)$ es igual a la evaluación $F_0(\Delta_{23}, -\Delta_{13}, \Delta_{12})$.

3. Consideremos tres polinomios f_0, f_1, f_2 en dos variables x_1, x_2 de la forma:

$$f_i(x_1, x_2) = a_i\ x_1x_2 + b_i\ x_1 + c_i\ x_2 + d_i, \quad a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{C},\ i = 0, 1, 2,$$

(a) Calcular el grado de la resultante $\mathrm{Res}_A(f_0, f_1, f_2)$, donde A es el conjunto de (los 4) exponentes de los f_i.

(b) Introduzcamos dos nuevas variables y_1, y_2 y sea B la matriz

$$\begin{pmatrix} a_0x_1x_2 + b_0x_1 + c_0x_2 + d_0 & a_1x_1x_2 + b_1x_1 + c_1x_2 + d_1 & a_2x_1x_2 + b_2x_1 + c_2x_2 + d_2 \\ a_0y_1x_2 + b_0y_1 + c_0x_2 + d_0 & a_1y_1x_2 + b_1y_1 + c_1x_2 + d_1 & a_2y_1x_2 + b_2y_1 + c_2x_2 + d_2 \\ a_0y_1y_2 + b_0y_1 + c_0y_2 + d_0 & a_1y_1y_2 + b_1y_1 + c_1y_2 + d_1 & a_2y_1y_2 + b_2y_1 + c_2y_2 + d_2 \end{pmatrix}$$

El polinomio Bezoutiano asociado se define por:

$$\frac{1}{(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)} \det(B) = B_{11} + B_{12}x_2 + B_{21}y_1 + B_{22}x_2y_1.$$

¿Cuál es el grado de los coeficientes B_{ij} en los coeficientes $(a_0, \ldots, d_2)$? ¿Se trata de un polinomio homogéneo? Multihomogéneo?

(c) Probar que $B_{11} = c_1b_0d_2 - b_0c_2d_1 - c_0b_1d_2 + c_2b_1d_0 + b_2c_0d_1 - c_1b_2d_0$ es el determinante de la matriz con filas $(b_0, c_0, d_0), (b_1, c_1, d_1), (b_2, c_2, d_2)$. ¿Y los demás B_{ij}?

(d) Probar (comparando grados y ceros) que existe una constante no nula λ tal que

$$\mathrm{Res}_A(f_0, f_1, f_2) = \lambda \det(B_{ij}).$$

(De hecho, puede verse que $\lambda = \pm 1$.)