La acción del primer espacio de cohomología de Hochschild de un álgebra sobre su categoría de módulos y su categoría derivada

Mariano Suárez-Álvarez
Universidad de Buenos Aires — CONICET

virtUMA 2021
Septiembre, 2021

Convenciones

- Fijamos un cuerpo de base $\mathbb{k}$.
- Siempre que hablemos de la teoría de Auslander–Reiten el cuerpo de base va a ser algebraicamente cerrado, las álgebras de dimensión finita y los módulos finitamente generados.
- Generalmente los módulos son a derecha.

d-operadores

Sean A un álgebra y $d : A \to A$ una derivación.

Definición

Si M es un A-módulo, un ***d-operador*** *es una función lineal $f : M \to M$ tal que*

$$f(m \cdot a) = f(m) \cdot a + m \cdot d(a).$$

Si $d = 0$, entonces un «d-operador = morfismo de A-módulos».
La función nula no es en general un d-operador.

Lema

Si $f, g : M \to M$ son dos d-operadores, entonces $f - g : M \to M$ es A-lineal.

d-operadores

Usé d-operadores para calcular corchetes de Gerstenhaber en:

- Mariano Suárez-Álvarez, A little bit of extra functoriality for Ext and the computation of the Gerstenhaber bracket, J. Pure Appl. Algebra 221 (2017), no. 8, 1981–1998.

Aparecen en varios lugares, con distintos nombres y estudiados con motivos bastante distintos…

d-operadores

La obstrucción $\mathscr{E}_M(d)$

En general, un módulo no admite ningún d-operador, y en ejemplos concretos puede ser complicado decidir si sí admite uno.

Basta saber hacerlo para módulos indescomponibles.

Hay una obstrucción cohomológica

$$M \in \mathrm{Mod}_A \rightsquigarrow \mathscr{E}_M(d) \in \mathrm{Ext}^1_A(M, M)$$

con la siguiente propiedad:

Proposición

Un módulo M admite un d-operador si y solamente si $\mathscr{E}_M(d) = 0$.

Cuando $\mathscr{E}_M(d) = 0$, los d-operadores en M están parametrizados por $\mathrm{End}_A(M)$: tenemos un «torsor».

d-operadores

La obstrucción $\mathscr{E}_M(d)$

En general, un módulo no admite ningún d-operador, y en ejemplos concretos puede ser complicado decidir si sí admite uno.

Basta saber hacerlo para módulos indescomponibles.

Hay una obstrucción cohomológica

$$M \in \mathrm{Mod}_A \rightsquigarrow \mathscr{E}_M(d) \in \mathrm{Ext}^1_A(M, M)$$

con la siguiente propiedad:

Proposición

Un módulo M admite un d-operador si y solamente si $\mathscr{E}_M(d) = 0$.

Cuando $\mathscr{E}_M(d) = 0$, los d-operadores en M están parametrizados por $\mathrm{End}_A(M)$: tenemos un «torsor».

d-operadores

La obstrucción $\mathscr{E}_M(d)$

En general, un módulo no admite ningún d-operador, y en ejemplos concretos puede ser complicado decidir si sí admite uno.

Basta saber hacerlo para módulos indescomponibles.

Hay una obstrucción cohomológica

$$M \in \mathrm{Mod}_A \rightsquigarrow \mathscr{E}_M(d) \in \mathrm{Ext}^1_A(M, M)$$

con la siguiente propiedad:

Proposición

Un módulo M admite un d-operador si y solamente si $\mathscr{E}_M(d) = 0$.

Cuando $\mathscr{E}_M(d) = 0$, los d-operadores en M están parametrizados por $\mathrm{End}_A(M)$: tenemos un «torsor».

Como $\mathscr{E}_M(d) \in \mathrm{Ext}^1_A(M, M)$, un corolario evidente es:

Corolario

Un módulo que es proyectivo o inyectivo admite d-operadores.

Más generalmente:

Corolario

Un módulo postproyectivo o preinyectivo admite d-operadores.

Como $\mathscr{E}_M(d) \in \operatorname{Ext}^1_A(M, M)$, un corolario evidente es:

Corolario

Un módulo que es proyectivo o inyectivo admite d-operadores.

Más generalmente:

Corolario

Un módulo postproyectivo o preinyectivo admite d-operadores.

En realidad no es más fácil calcular $\mathscr{E}_M(d) \in \operatorname{Ext}^1_A(M, M)$ que decidir «a mano» si M posee un d-operador...

Lo que sí podemos hacer es estudiar las propiedades formales de esta construcción. Por ejemplo:

Proposición

Hay una función lineal

$$\mathscr{E}_M : \mathrm{HH}^1(A) \to \operatorname{Ext}^1_A(M, M).$$

La observación importante aquí es que $\mathscr{E}_M(d) = 0$ siempre que la derivación $d : A \to A$ es interior.

En realidad no es más fácil calcular $\mathscr{E}_M(d) \in \mathrm{Ext}^1_A(M, M)$ que decidir «a mano» si M posee un d-operador...

Lo que sí podemos hacer es estudiar las propiedades formales de esta construcción. Por ejemplo:

Proposición

Hay una función lineal

$$\mathscr{E}_M : \mathrm{HH}^1(A) \to \mathrm{Ext}^1_A(M, M).$$

La observación importante aquí es que $\mathscr{E}_M(d) = 0$ siempre que la derivación $d : A \to A$ es interior.

La forma eficiente de calcular $\mathscr{E}_M(d)$ es pasar a la categoría derivada.

Definición

Si X es un complejo de módulos, un d-operador es una sucesión $(f_i : X_i \to X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de d-operadores que hacen conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}"] \arrow[d, "f^{i-1}"] & X^i \arrow[r, "d^i"] \arrow[d, "f^i"] & X^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{i+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & X^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}"] & X^i \arrow[r, "d^i"] & X^{i+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Como antes, en general un complejo no admite ningún d-operador.

- Puede ser que alguna de sus componentes no admita un d-operador.
- En $D(A)$ podemos reemplazarlo por un complejo con componentes proyectivas, pero así y todo puede ser que el complejo nuevo admita un d-operador.

Como con los módulos, hay una asignación

$$X \in D(A) \rightsquigarrow \nabla_X(d) \in \hom_{D(A)}(X, X[1])$$

que es precisamente la obstrucción:

Proposición

Un complejo $X \in D(A)$ admite un d-operador si y solamente si $\nabla_X(d) = 0$ en $\hom_{D(A)}(X, X[1])$.

El punto de todo esto es que

- Es razonablemente fácil calcular $\nabla_X(d) : X \to X[1]\ldots$ al menos cuando X es un complejo de proyectivos.
- Si M es un módulo y lo vemos como un complejo, entonces

$$\mathscr{E}_M(d) = \nabla_M(d).$$

Aquí estamos usando que

$$\operatorname{Ext}^1_A(M, M) = \hom_{D(A)}(M, M[1]).$$

d-operadores

Complejos

Para cada $X \in D(A)$ tenemos un morfismo

$$\nabla_X(d) : X \to X[1]$$

Proposición

$\nabla(d)$ *es una transformación natural*

$$\mathrm{Id}_{D(A)} \to T$$

compatible con translaciones

$$\nabla_{X[1]}(d) = -\nabla_X(d)[1]$$

y que se anula si d *es interior, así que tenemos*

$$\nabla : \mathrm{HH}^1(A) \to \mathrm{Nat}(\mathrm{Id}_{D(A)}, T).$$

Teorema

∇ *es la componente de grado* 1 *del* ***morfismo característico***

$$\mathrm{HH}^*(A) \to \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Nat}(\mathrm{Id}_{D(A)}, T^n).$$

El núcleo de $\mathscr{E}(d)$

Vuelvo a los módulos.

Quiero entender la subcategoría plena generada por los módulos que admiten un d-operador:

$$\ker \mathscr{E}(d) = \{M \in \mathrm{Mod}_A : \mathscr{E}_M(d) = 0\}$$

Lema

$\ker \mathscr{E}(d)$ *es cerrada por sumandos directos.*

Basta entender los indescomponibles de $\ker \mathscr{E}(d)$.

El núcleo de $\mathscr{E}(d)$

Cuando

- A tiene dimensión finita y
- miro módulos de dimensión finita

$\ker \mathscr{E}(d)$ queda determinada por un subconjunto de los vértices del quiver de Auslander–Reiten de A.

Proposición

Si M está en $\ker \mathscr{E}(d)$, entonces $\tau(M)$ y $\tau^{-1}(M)$ también.

El núcleo de $\mathscr{E}(d)$

$\ker \mathscr{E}(d)$ no es cerrada por extensiones... pero:

Teorema

Supongamos que la característica de $\Bbbk$ es nula y sea

$$0 \longrightarrow \tau(M) \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

es una sucesión casi escindida en Mod_A.

Si alguno de M o $\tau(M)$ está en $\ker \mathscr{E}(d)$, entonces E también está en $\ker \mathscr{E}(d)$.

El núcleo de $\mathscr{E}(d)$

Proposición

Supongamos que la característica de $\Bbbk$ *es nula.*
Sea C *una componente* ***regular*** *del quiver de Auslander–Reiten de* A*.*

Si $C \cap \ker \mathscr{E}(d) \neq \emptyset$*, entonces* $C \subseteq \ker \mathscr{E}(d)$*.*

El núcleo de $\mathscr{E}(d)$

¿Qué pasa con las otras componentes?

Proposición

Las componentes postproyectivas o preinyectivas de Γ_A están en $\ker \mathscr{E}(d)$.

(La característica de $\mathbb{k}$ no importa aquí!)

Proposición

Supongamos que la característica de $\mathbb{k}$ es nula.
Una componente C de Γ_A está en $\ker \mathscr{E}(d)$ si $\ker \mathscr{E}(d)$ contiene

- *el top de cada proyectivo que está en C y*
- *el zócalo de cada inyectivo que está en C.*

El núcleo de $\mathscr{E}(d)$

Esta última condición es un poco rara...

Estudiando en detalle cómo son las derivaciones d que tienen a los simples en $\ker \mathscr{E}(d)$ (...esto es largo...) uno llega a

Proposición

Supongamos que la característica de $\mathbb{k}$ es nula.

Si A es básica, entonces $\ker \mathscr{E}(d)$ contiene a todas las componentes no regulares de Γ_A.

El núcleo de $\mathscr{E}(d)$

Un corolario de esto es:

Proposición

Supongamos que la característica de $\Bbbk$ *es nula.*

Si A *tiene tipo de representación finito, entonces* $\ker \mathscr{E}(d) = \mathsf{Mod}_A$.

La condición sobre la característica es importante.

Geometría dentro de $\mathrm{HH}^1(A)$

Todo esto vino de fijar una derivación d y ver qué módulos admiten un d operador.

Podemos proceder en la otra dirección:

Definición

Para cada módulo ponemos

$$M^{\perp} = \{d \in \mathrm{HH}^1(A) : \mathscr{E}_M(d) = 0\}.$$

Esto nos da la posibilidad de hacer geometría adentro de $\mathrm{HH}^1(A)$.

Geometría dentro de $\mathrm{HH}^1(A)$

Todo esto vino de fijar una derivación d y ver qué módulos admiten un d operador.

Podemos proceder en la otra dirección:

Definición

Para cada módulo ponemos

$$M^\perp = \{d \in \mathrm{HH}^1(A) : \mathscr{E}_M(d) = 0\}.$$

Esto nos da la posibilidad de hacer geometría adentro de $\mathrm{HH}^1(A)$.

Geometría dentro de $\mathrm{HH}^1(A)$

Veamos un ejemplo.

Supongamos que A es el álgebra de Kronecker.

$$1 \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} 2$$

En este caso

- $\mathrm{HH}^1(A) \cong \mathfrak{sl}_2$ como álgebra de Lie,
- En particular, $\dim \mathrm{HH}^1(A) = 3$.
- Si M no es regular, entonces $M^\perp = \mathrm{HH}^1(A)$.
- Si M es un módulo regular, entonces $M^\perp \subseteq \mathrm{HH}^1(A)$ tiene codimensión 1...
- ... así que $M^\perp \in P^*(\mathrm{HH}^1(A))$, la proyectivización del espacio dual de $\mathrm{HH}^1(A)$.

Geometría dentro de $\mathsf{HH}^1(A)$

Podemos considerar el conjunto

$$\mathscr{C} = \{M^\perp : M \in \mathsf{Mod}_A\} \subseteq P^*(\mathsf{HH}^1(A)).$$

Lema

El subconjunto $\mathscr{C}$ de $P^*(\mathsf{HH}^1(A))$ es una cónica no singular, así que es isomorfa a la recta proyectiva P^1.

Tenemos entonces una función

$$\pi : M \in \Gamma_A^{\mathrm{reg}} \longmapsto M^\perp \in \mathscr{C}.$$

Los resultados anteriores implican que esta función es constante sobre las componentes regulares.

Proposición

Las fibras de π son precisamente las componentes regulares de Γ_A.

Este fenómeno ocurre con «muchas» álgebras, incluidas álgebras de dimensión infinita…

Gracias