Una caracterización puramente homológica de las álgebras de cuerdas de tipo de representación finito

Mariano Suárez-Álvarez
Universidad de Buenos Aires — CONICET

virtUMA 2020
21 al 25 de septiembre, 2020

Convenciones

- Fijamos un cuerpo de base $\mathbb{k}$ algebraicamente cerrado.
- Todas las álgebras son de dimensión finita.
- Todos los módulos son a izquierda y finitamente generados.

Álgebras de cuerdas

Un cociente admisible $A = \mathbb{k}Q/I$ de un álgebra de caminos sobre un carcaj Q es un álgebra de cuerdas si

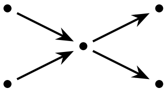
- El ideal I está generado por caminos.
- Cada vértice de Q es fuente de a lo sumo dos flechas y destino de a lo sumo dos flechas.

- Para cada flecha α hay
  - a lo sumo una flecha β tal que $\alpha\beta \notin I$, y
  - a lo sumo una flecha γ tal que $\gamma\alpha \notin I$.

Álgebras de cuerdas

Un cociente admisible $A = \Bbbk Q/I$ de un álgebra de caminos sobre un carcaj Q es un álgebra de cuerdas si

- El ideal I está generado por caminos.
- Cada vértice de Q es fuente de a lo sumo dos flechas y destino de a lo sumo dos flechas.

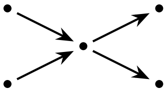


- Para cada flecha α hay
  - a lo sumo una flecha β tal que $\alpha\beta \notin I$, y
  - a lo sumo una flecha γ tal que $\gamma\alpha \notin I$.

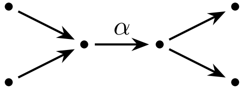
Álgebras de cuerdas

Un cociente admisible $A = \Bbbk Q/I$ de un álgebra de caminos sobre un carcaj Q es un álgebra de cuerdas si

- El ideal I está generado por caminos.
- Cada vértice de Q es fuente de a lo sumo dos flechas y destino de a lo sumo dos flechas.



- Para cada flecha α hay
  - a lo sumo una flecha β tal que $\alpha\beta \notin I$, y
  - a lo sumo una flecha γ tal que $\gamma\alpha \notin I$.



Álgebras de cuerdas

- I. M. Gelfand, V. A. Ponomarev 1968: representaciones del grupo de Lorentz $\rightsquigarrow \mathbb{C}[x, y]/(xy)$.

  Indecomposable representations of the Lorentz group. Usp. Mat. Nauk,23, 1968, pp. 3–60.

- C. M. Ringel: representaciones modulares de 2-grupos dihedrales.

  The indecomposable representations of the dihedral 2-groups. Math. Ann. 214, 19–34 (1975).

- M.C.R. Butler, C.M. Ringel: algebras de cuerdas en general.

  Auslander-Reiten sequences with few middle terms and applications to string algebras, Comm. Algebra 15 (1987), no. 1-2, 145–179.

Álgebras de cuerdas

- I. M. Gelfand, V. A. Ponomarev 1968: representaciones del grupo de Lorentz $\rightsquigarrow \mathbb{C}[x,y]/(xy)$.
  Indecomposable representations of the Lorentz group. Usp. Mat. Nauk,23, 1968, pp. 3–60.
- C. M. Ringel: representaciones modulares de 2-grupos dihedrales.
  The indecomposable representations of the dihedral 2-groups. Math. Ann. 214, 19–34 (1975).
- M.C.R. Butler, C.M. Ringel: algebras de cuerdas en general.
  Auslander-Reiten sequences with few middle terms and applications to string algebras, Comm. Algebra 15 (1987), no. 1-2, 145–179.

Álgebras de cuerdas

- I. M. Gelfand, V. A. Ponomarev 1968: representaciones del grupo de Lorentz $\rightsquigarrow \mathbb{C}[x, y]/(xy)$.
  Indecomposable representations of the Lorentz group. Usp. Mat. Nauk,23, 1968, pp. 3–60.
- C. M. Ringel: representaciones modulares de 2-grupos dihedrales.
  The indecomposable representations of the dihedral 2-groups. Math. Ann. 214, 19–34 (1975).
- M.C.R. Butler, C.M. Ringel: algebras de cuerdas en general.
  Auslander-Reiten sequences with few middle terms and applications to string algebras, Comm. Algebra 15 (1987), no. 1-2, 145–179.

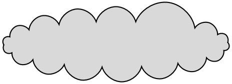
Álgebras de cuerdas

- Álgebras biseriales especiales
  Auslander, Reiten, Skowrońsky, Waschbüsch, Assem, ...
- Álgebras gentiles
  Assem, Skowrońsky (iterated tilted algebras of type $\tilde{A}_n$), ...

Álgebras de cuerdas

- Álgebras biseriales especiales
  Auslander, Reiten, Skowrońsky, Waschbüsch, Assem, ...

- Álgebras gentiles
  Assem, Skowrońsky (iterated tilted algebras of type $\tilde{\mathrm{A}}_n$), ...



- Conocemos explícitamente todos los módulos indescomponibles: strings y bands.
- Teoría de representación mansa.

  Es fácil decidir cuándo el tipo es finito o doméstico.
- Conocemos todas las sucesiones de Auslander–Reiten en la categoría de módulos.
- Sabemos cómo son las componentes conexas del carcaj de Auslander–Reiten.

  ¡Pueden ser muy complicadas!

Álgebras de cuerdas

Representaciones

- Conocemos explícitamente todos los módulos indescomponibles: strings y bands.
- Teoría de representación mansa.

  Es fácil decidir cuándo el tipo es finito o doméstico.
- Conocemos todas las sucesiones de Auslander–Reiten en la categoría de módulos.
- Sabemos cómo son las componentes conexas del carcaj de Auslander–Reiten.

  ¡Pueden ser muy complicadas!

- Conocemos explícitamente todos los módulos indescomponibles: strings y bands.
- Teoría de representación mansa.
  Es fácil decidir cuándo el tipo es finito o doméstico.
- Conocemos todas las sucesiones de Auslander–Reiten en la categoría de módulos.
- Sabemos cómo son las componentes conexas del carcaj de Auslander–Reiten.
  ¡Pueden ser muy complicadas!

Álgebras de cuerdas

Representaciones

- Conocemos explícitamente todos los módulos indescomponibles: strings y bands.
- Teoría de representación mansa.
  Es fácil decidir cuándo el tipo es finito o doméstico.
- Conocemos todas las sucesiones de Auslander–Reiten en la categoría de módulos.
- Sabemos cómo son las componentes conexas del carcaj de Auslander–Reiten.
  ¡Pueden ser muy complicadas!

- Butler–Ringel: el termino del medio de toda sucesión de Auslander–Reiten tiene a lo sumo dos sumandos indescomponibles.

  Auslander-Reiten sequences with ***few middle terms*** and applications to string algebras, Comm. Algebra 15 (1987), no. 1-2, 145–179.

Álgebras de cuerdas

Problema

La definición de álgebra de cuerdas es horrible.

Una caracterización homológica

Teorema

Un álgebra A de tipo de representación finito es un álgebra de cuerdas si y solamente si cada vez que

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

es una extensión de A-módulos con M y N indescomponibles el módulo E es suma directa de a lo sumo dos sumandos indescomponibles.

- La hipótesis de tipo de representación finito es ***necesaria***.

Una caracterización homológica

Sea A un álgebra de tipo de representación finito que satisface la condición del teorema.

Queremos mostrar que es un álgebra de cadenas.

La hipótesis implica que $\alpha(A) \leq 2$.

Skowroński–Waschbüsch, Auslander–Reiter + trabajo extra.

Todo esto depende fuertemente de que A tenga tipo finito.

Una caracterización homológica

La recíproca:

Proposición

Si A es un álgebra de cuerdas de tipo de representación finito, entonces en toda sucesión exacta corta de A-módulos

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

en la que M y N son indescomponibles, el módulo E es suma directa de a lo sumo dos sumandos indescomponibles.

Una caracterización homológica

- La conclusión es cierta si la sucesión es casi escindida: Butler–Ringel nos dicen que $\alpha(A) \leq 2$.

- Si A es ***gentil***, entonces

  İ. Çanakçı, D. Pauksztello, S. Schroll, On extensions for gentle algebras, Canadian Journal of Mathematics, 1-44. (2020)

  describe una ***base*** de $\mathrm{Ext}^1_A(M, N)$ para cada elección de indescomponibles M y N.

  Para esas extensiones la conclusión es cierta... pero esto no es suficiente.

Una caracterización homológica

- La conclusión es cierta si la sucesión es casi escindida: Butler–Ringel nos dicen que $\alpha(A) \leq 2$.

- Si A es ***gentil***, entonces

  İ. Çanakçı, D. Pauksztello, S. Schroll, On extensions for gentle algebras, Canadian Journal of Mathematics, 1-44. (2020)

  describe una ***base*** de $\operatorname{Ext}^1_A(M, N)$ para cada elección de indescomponibles M y N.

  Para esas extensiones la conclusión es cierta... pero esto no es suficiente.

Una caracterización homológica

Degeneraciones de módulos

Si $d \in \mathbb{N}_0$, hay

- una variedad algebraica afín $\operatorname{Rep}_d(A)$ de las estructuras de A-módulo sobre el espacio vectorial $\Bbbk^d$ y
- una acción de $\mathrm{GL}_d(\Bbbk)$ sobre $\operatorname{Rep}_d(A)$ por «cambio de base».

Todo A-módulo M de dimensión d es isomorfo a un punto p_M de $\operatorname{Rep}_d(A)$.

Si M y N son A-módulos de dimensión d, decimos que M ***degenera*** en N si

el punto p_N está en la clausura de la $\mathrm{GL}_d(\Bbbk)$-órbita de p_M.

Escribimos $M \rightsquigarrow N$.

Si $d \in \mathbb{N}_0$, hay

- una variedad algebraica afín $\operatorname{Rep}_d(A)$ de las estructuras de A-módulo sobre el espacio vectorial $\Bbbk^d$ y
- una acción de $\mathrm{GL}_d(\Bbbk)$ sobre $\operatorname{Rep}_d(A)$ por «cambio de base».

Todo A-módulo M de dimensión d es isomorfo a un punto p_M de $\operatorname{Rep}_d(A)$.

Si M y N son A-módulos de dimensión d, decimos que M ***degenera*** en N si

el punto p_N está en la clausura de la $\mathrm{GL}_d(\Bbbk)$-órbita de p_M.

Escribimos $M \rightsquigarrow N$.

El ejemplo más sencillo (K. Bongartz):

Proposición

Si

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de A-módulos, entonces

$$E \rightsquigarrow M \oplus N.$$

Escribamos $|M|$ al número de sumandos directos indescomponibles de un módulo M.

En general, si $M \rightsquigarrow N$, no hay ninguna relación útil entre $|M|$ y $|N|$.

Peor caso: Bongartz da ejemplos de módulos M con $|M|$ arbitrariamente grande que degeneran en indescomponibles.

Usando ideas

> *C. Riedtmann, Degenerations for representations of quivers with relations, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 19 (1986), no. 2, 275–301.*

podemos probar el resultado central del trabajo:

Proposición

Sea A un álgebra de cuerdas de tipo de representación finito. Si $M \rightsquigarrow N$, entonces $|M| \leq |N|$.

La prueba depende totalmente en la teoría de Auslander–Reiten.

Una caracterización homológica

Proposición

Sea A un álgebra de cuerdas de tipo de representación finito. Si $M \rightsquigarrow N$, entonces $|M| \leq |N|$.

Proposición

Si $0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow N \longrightarrow 0$ *es una sucesión exacta corta de A-módulos, entonces*

$$E \rightsquigarrow M \oplus N.$$

Si en

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

M y N son indescomponibles, entonces $|E| \leq |M \oplus N| = 2$.

Tipo de representación infinito

Apoyándome en la descripción de los módulos indescomponibles de un álgebra de cuerdas y en algunos resultados de Ringel sobre ***módulos genéricos*** puedo probar:

Proposición

Si A es un álgebra de cuerdas de tipo de representación no doméstico, entonces hay extensiones

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

con M y N indescomponibles y $|E|$ arbitrariamente grande.

Esto es una construcción explícita.

Gracias