Cohomología de Hochschild de álgebras de operadores diferenciales

Mariano Suárez-Alvarez
mariano@dm.uba.ar

23 de marzo, 2009

Funciones regulares sobre una variedad algebraica

$\mathcal{O}(X)$ "es" X.

Funciones regulares sobre una variedad algebraica

$\mathcal{O}(X)$ "es" X.

It is a truth universally acknowledged, that a single man in possession of a good fortune, must be in want of a wife.

Jane Austen, Pride and Prejudice.

Es una verdad universalmente aceptada que un hombre soltero y poseedor de una gran fortuna ha de buscar una esposa.

Jane Austen, Orgullo y Prejuicio.

It is a truth universally acknowledged, that a single man in possession of a good fortune, must be in want of a wife.

Jane Austen, Pride and Prejudice.

Es una verdad universalmente aceptada que un hombre soltero y poseedor de una gran fortuna ha de buscar una esposa.

Jane Austen, Orgullo y Prejuicio.

Funciones regulares sobre una variedad algebraica

$\mathcal{O}(X)$ "es" X.

Teorema
Si X es regular, entonces $HH^\bullet(\mathcal{O}(X)) \cong \Omega^\bullet_X$.

Teorema
Si X es regular entonces $HC_\bullet(\mathcal{O}(X))$ es, esencialmente, $H^\bullet(X)$.

- G. Hochschild, B. Kostant, A. Rosenberg. Differential forms on regular affine algebras, Trans. Amer. Math. Soc., **102**, (1962), 383–408.
- A. Connes. Noncommutative differential geometry. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **62** (1985), 257–360.

Funciones regulares sobre una variedad algebraica

$\mathcal{O}(X)$ "es" X.

Teorema

Si X es regular, entonces $HH^\bullet(\mathcal{O}(X)) \cong \Omega^\bullet_X$.

Teorema

Si X es regular entonces $HC_\bullet(\mathcal{O}(X))$ es, esencialmente, $H^\bullet(X)$.

- G. Hochschild, B. Kostant, A. Rosenberg. Differential forms on regular affine algebras, Trans. Amer. Math. Soc., **102**, (1962), 383–408.
- A. Connes. Noncommutative differential geometry. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **62** (1985), 257–360.

Funciones regulares sobre una variedad algebraica

$\mathcal{O}(X)$ "es" X.

Teorema

Si X es regular, entonces $HH^\bullet(\mathcal{O}(X)) \cong \Omega^\bullet_X$.

Teorema

Si X es regular entonces $HC_\bullet(\mathcal{O}(X))$ es, esencialmente, $H^\bullet(X)$.

- G. Hochschild, B. Kostant, A. Rosenberg. Differential forms on regular affine algebras, Trans. Amer. Math. Soc., **102**, (1962), 383–408.
- A. Connes. Noncommutative differential geometry. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **62** (1985), 257–360.

Funciones regulares sobre una variedad algebraica

$\mathcal{O}(X)$ "es" X.

Teorema

Si X es regular, entonces $HH^\bullet(\mathcal{O}(X)) \cong \Omega^\bullet_X$.

Teorema

Si X es regular entonces $HC_\bullet(\mathcal{O}(X))$ es, esencialmente, $H^\bullet(X)$.

- G. Hochschild, B. Kostant, A. Rosenberg. Differential forms on regular affine algebras, Trans. Amer. Math. Soc., **102**, (1962), 383–408.
- A. Connes. Noncommutative differential geometry. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **62** (1985), 257–360.

Operadores diferenciales sobre variedades regulares

Proposición

Sea X una variedad afín regular.

Conjetura

Si $D(X)$ está generada por $\mathcal{O}(X)$ y $\mathrm{Der}(\mathcal{O}(X))$, entonces X es regular.

- Y. Nakai. On the theory of differentials in commutative rings. J. Math. Soc. Japan 13 (1961), 63–84.

Operadores diferenciales sobre variedades regulares

Proposición

Sea X una variedad afín regular.

- $D(X)$ *está generada por* $\mathcal{O}(X)$ *y* $\mathrm{Der}(\mathcal{O}(X))$ *como subálgebra de* $\mathrm{End}(\mathcal{O}(X))$,
- *es casi-conmutativa y*
- *es noetheriana a izquierda y a derecha.*

Conjetura

Si $D(X)$ *está generada por* $\mathcal{O}(X)$ *y* $\mathrm{Der}(\mathcal{O}(X))$, *entonces* X *es regular.*

- Y. Nakai. On the theory of differentials in commutative rings. J. Math. Soc. Japan **13** (1961), 63–84.

Operadores diferenciales sobre variedades regulares

Proposición

Sea X una variedad afín regular.

- $D(X)$ *está generada por* $\mathcal{O}(X)$ *y* $\mathrm{Der}(\mathcal{O}(X))$ *como subálgebra de* $\mathrm{End}(\mathcal{O}(X))$,
- *es casi-conmutativa y*
- *es noetheriana a izquierda y a derecha.*

Conjetura

Si $D(X)$ *está generada por* $\mathcal{O}(X)$ *y* $\mathrm{Der}(\mathcal{O}(X))$, *entonces* X *es regular.*

- Y. Nakai. On the theory of differentials in commutative rings. J. Math. Soc. Japan **13** (1961), 63–84.

Operadores diferenciales sobre variedades regulares

Proposición

Sea X una variedad afín regular.

- $D(X)$ *está generada por* $\mathcal{O}(X)$ *y* $\operatorname{Der}(\mathcal{O}(X))$ *como subálgebra de* $\operatorname{End}(\mathcal{O}(X))$,
- *es casi-conmutativa y*
- *es noetheriana a izquierda y a derecha.*

Conjetura

Si $D(X)$ *está generada por* $\mathcal{O}(X)$ *y* $\operatorname{Der}(\mathcal{O}(X))$, *entonces* X *es regular.*

- Y. Nakai. On the theory of differentials in commutative rings. J. Math. Soc. Japan **13** (1961), 63–84.

Proposición

Si X es regular, $D(X)$ es simple.

Proposición

Si X es regular, $D(X)$ es un anillo regular, y

$$\operatorname{gldim} D(X) = \operatorname{Kdim} D(X) = \dim X,$$
$$\operatorname{GKdim} D(X) = 2n$$

Operadores diferenciales sobre variedades regulares

Presentaciones

Si X es regular, es posible dar generadores y relaciones para $D(X)$ a partir de una presentación de $\mathcal{O}(X)$.

- V. V. Bavula. Generators and defining relations for the ring of differential operators on a smooth affine algebraic variety. `arXiv:math/0504475`
- V. V. Bavula. Generators and defining relations for ring of differential operators on smooth affine algebraic variety in prime characteristic. `arXiv:0808.3970`

Operadores diferenciales sobre variedades regulares

Un ejemplo: la recta afín

Si $X = \mathbb{A}^1$, entonces $\mathcal{O}(X) = \mathbb{C}[t]$,

$$\mathrm{Der}(\mathcal{O}(X)) = \mathbb{C}[t]\,\frac{d}{dt}$$

y

$$D(X) = \mathbb{C}\langle t, \tfrac{d}{dt}\rangle \subset \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[t]).$$

Si notamos $q = t$ y $p = \frac{d}{dt}$, entonces

$$qp - pq = 1$$

y, de hecho, se puede ver que

$$D(X) = \mathbb{C}\langle p, q : qp - pq = 1\rangle.$$

Esta es el *álgebra de Weyl* A_1.

Si $X = \mathbb{A}^1$, entonces $\mathcal{O}(X) = \mathbb{C}[t]$,

$$\mathrm{Der}(\mathcal{O}(X)) = \mathbb{C}[t]\,\tfrac{d}{dt}$$

y

$$D(X) = \mathbb{C}\langle t, \tfrac{d}{dt}\rangle \subset \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[t]).$$

Si notamos $q = t$ y $p = \frac{d}{dt}$, entonces

$$qp - pq = 1$$

y, de hecho, se puede ver que

$$D(X) = \mathbb{C}\langle p, q : qp - pq = 1\rangle.$$

Esta es el *álgebra de Weyl* A_1.

Más generalmente, si $X = \mathbb{A}^n$, entonces

$$D(X) = \mathbb{C}\langle p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n \rangle$$

con relaciones

$$[q_i, p_j] = \delta_{i,j},$$
$$[p_i, p_j] = 0,$$
$$[q_i, q_j] = 0.$$

Esta es el *álgebra de Weyl* A_n.

Teorema

Para todo $n \geq 1$ es

$$HH^i(A_n) = \begin{cases} \mathbb{C}, & \textit{si } i = 0; \\ 0, & \textit{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

- R. Sridharan. Filtered algebras and representations of Lie algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **100** (1961) 530–550.

Teorema

Para todo $n \geq 1$ es

$$HH^i(A_n) = \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{si } i = 0; \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

- R. Sridharan. Filtered algebras and representations of Lie algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **100** (1961) 530–550.

Teorema

Si X es una variedad regular afín, entonces

$$HH^\bullet(D(X)) \cong H^\bullet(X_{\mathbb{C}})$$

como álgebra.

- J.-L. Brylinski. Some examples of Hochschild and cyclic homology. Algebraic groups Utrecht 1986, 33–72, Lecture Notes in Math., **1271**, Springer, Berlin, 1987.
- M. Wodzicki. Cyclic homology of differential operators. Duke Math. J. **54** (1987), no. 2, 641–647.

Operadores diferenciales sobre curvas afines

El caso general

Teorema

Sea X una curva afín. Entonces $D(X)$ es un álgebra finitamente generada y noetheriana.

- S. P. Smith, J. T. Stafford. Differential operators on an affine curve. Proc. London Math. Soc. (3) **56** (1988), no. 2, 229–259.

Con la misma idea, dan ejemplos de variedades de dimensión mayor para las cuales $D(X)$ es noetheriana a derecha pero no a izquierda.

Teorema

Sea X una curva afín. Entonces $D(X)$ es un álgebra finitamente generada y noetheriana.

- S. P. Smith, J. T. Stafford. Differential operators on an affine curve. Proc. London Math. Soc. (3) **56** (1988), no. 2, 229–259.

Con la misma idea, dan ejemplos de variedades de dimensión mayor para las cuales $D(X)$ es noetheriana a derecha pero no a izquierda.

Teorema
Sea X una curva afín. Entonces $D(X)$ es un álgebra finitamente generada y noetheriana.

- S. P. Smith, J. T. Stafford. Differential operators on an affine curve. Proc. London Math. Soc. (3) **56** (1988), no. 2, 229–259.

Con la misma idea, dan ejemplos de variedades de dimensión mayor para las cuales $D(X)$ es noetheriana a derecha pero no a izquierda.

Teorema

Sea X una curva afín singular. Entonces $D(X)$ posee un único ideal minimal no nulo J y el cociente $D(X)/J$ es un álgebra de dimensión finita.

- S. P. Smith. Curves, differential operators and finite-dimensional algebras. Seminaire d'algebre Paul Dubreil et Marie-Paule Malliavin (Paris, 1986), 158–176, Lecture Notes in Math., **1296**, Springer, Berlin, 1987.

Operadores diferenciales sobre curvas afines

El caso general

Teorema

Sea X una curva afín singular. Entonces $D(X)$ posee un único ideal minimal no nulo J y el cociente $D(X)/J$ es un álgebra de dimensión finita.

- S. P. Smith. Curves, differential operators and finite-dimensional algebras. Seminaire d'algebre Paul Dubreil et Marie-Paule Malliavin (Paris, 1986), 158–176, Lecture Notes in Math., **1296**, Springer, Berlin, 1987.

Teorema

Sea X una curva afín, sea $\tilde{X}$ la normalización de X y $\pi : \tilde{X} \to X$ la proyección canónica. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) *π es inyectiva.*

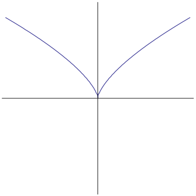
(b) *$D(X)$ es simple.*

(c) *$D(X)$ y $D(\tilde{X})$ son equivalentes en el sentido de Morita.*

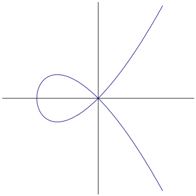
(d) *$\operatorname{gr} D(X)$ es noetheriana.*

(e) *$\operatorname{gldim} D(X) = 1$.*

Operadores diferenciales sobre curvas afines



$$x^3 = y^2$$



$$x^2(x+1) = y^2$$

Operadores diferenciales sobre curvas afines

Corolario

Sea X una curva afín, sea $\tilde{X}$ la normalización de X y $\pi : \tilde{X} \to X$ la proyección canónica. Si se satisfacen las condiciones del teorema, entonces

$$HH^{\bullet}(D(X)) \cong H^{\bullet}(\tilde{X}_{\mathbb{C}}).$$

Operadores diferenciales sobre curvas afines

¿Podemos extender el corolario anterior?

Una clase de ejemplos: cocientes por grupos finitos

Sea V un espacio vectorial y sea $G \subset \mathrm{Aut}(V)$ un grupo finito de automorfismos lineales de V.

Proposición

$\mathcal{O}(V/G) = \mathcal{O}(V)^G$.

Una clase de ejemplos: cocientes por grupos finitos

Sea V un espacio vectorial y sea $G \subset \mathrm{Aut}(V)$ un grupo finito de automorfismos lineales de V.

Proposición

$\mathcal{O}(V/G) = \mathcal{O}(V)^G$.

Una clase de ejemplos: cocientes por grupos finitos

En general, V/G es una variedad singular.

Teorema

V/G es regular sii G está generado por pseudo-reflexiones.

Ejemplo

Si S_n actúa sobre $\mathbb{C}^n$ tautológicamente, entonces $\mathbb{C}^n/S_n \cong \mathbb{C}^n$.

- G. C. Shephard, J. A. Todd. Finite unitary reflection groups. Canadian J. Math., 6, (1954), 274–304

Una clase de ejemplos: cocientes por grupos finitos

En general, V/G es una variedad singular.

Teorema

V/G es regular sii G está generado por pseudo-reflexiones.

Ejemplo

Si S_n actúa sobre $\mathbb{C}^n$ tautológicamente, entonces $\mathbb{C}^n/S_n \cong \mathbb{C}^n$.

- G. C. Shephard, J. A. Todd. Finite unitary reflection groups, Canadian J. Math., **6**, (1954), 274–304

Una clase de ejemplos: cocientes por grupos finitos

En general, V/G es una variedad singular.

Teorema

V/G es regular sii G está generado por pseudo-reflexiones.

Ejemplo

Si S_n actúa sobre $\mathbb{C}^n$ tautológicamente, entonces $\mathbb{C}^n/S_n \cong \mathbb{C}^n$.

- G. C. Shephard, J. A. Todd. Finite unitary reflection groups, Canadian J. Math., **6**, (1954), 274–304

Una clase de ejemplos: cocientes por grupos finitos

Sea $\mathbb{C}^2$ el plano complejo. Sea $n \geq 1$ y $V = (\mathbb{C}^2)^n$.
Hay una acción del grupo simétrico S_n sobre V, así que podemos ver a $S_n \subset \mathrm{Aut}(V)$.

Los puntos del cociente V/S_n se identifican con conjuntos de n puntos del plano $\mathbb{C}^2$.

No hay en S_n ninguna pseudo-reflexión, así que V/S_n es singular.

Hay una desingularización especialmente interesante

$$\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2) = \widetilde{V/S_n} \to V/S_n,$$

el *esquema de Hilbert de n puntos del plano*.

Una clase de ejemplos: cocientes por grupos finitos

Sea $\mathbb{C}^2$ el plano complejo. Sea $n \geq 1$ y $V = (\mathbb{C}^2)^n$.
Hay una acción del grupo simétrico S_n sobre V, así que podemos ver a $S_n \subset \mathrm{Aut}(V)$.

Los puntos del cociente V/S_n se identifican con conjuntos de n puntos del plano $\mathbb{C}^2$.

No hay en S_n ninguna pseudo-reflexión, así que V/S_n es singular.

Hay una desingularización especialmente interesante

$$\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2) = \widetilde{V/S_n} \to V/S_n,$$

el *esquema de Hilbert de n puntos del plano.*

Una clase de ejemplos: cocientes por grupos finitos

Sea $\mathbb{C}^2$ el plano complejo. Sea $n \geq 1$ y $V = (\mathbb{C}^2)^n$.
Hay una acción del grupo simétrico S_n sobre V, así que podemos ver a $S_n \subset \mathrm{Aut}(V)$.

Los puntos del cociente V/S_n se identifican con conjuntos de n puntos del plano $\mathbb{C}^2$.

No hay en S_n ninguna pseudo-reflexión, así que V/S_n es singular.

Hay una desingularización especialmente interesante

$$\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2) = \widetilde{V/S_n} \to V/S_n,$$

el *esquema de Hilbert de n puntos del plano*.

Una clase de ejemplos: cocientes por grupos finitos

Sea $\mathbb{C}^2$ el plano complejo. Sea $n \geq 1$ y $V = (\mathbb{C}^2)^n$.
Hay una acción del grupo simétrico S_n sobre V, así que podemos ver a $S_n \subset \mathrm{Aut}(V)$.

Los puntos del cociente V/S_n se identifican con conjuntos de n puntos del plano $\mathbb{C}^2$.

No hay en S_n ninguna pseudo-reflexión, así que V/S_n es singular.

Hay una desingularización especialmente interesante

$$\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2) = \widetilde{V/S_n} \to V/S_n,$$

el *esquema de Hilbert de n puntos del plano*.

Una clase de ejemplos: cocientes por grupos finitos

Teorema

$D(V/G) = D(V)^G$ sii G no contiene ninguna pseudo-reflexión.

- Th. Levasseur. Relèvements d'opérateurs différentiels sur les anneaux d'invariants. Operator algebras, unitary representations, enveloping algebras, and invariant theory (Paris, 1989), 449–470, Progr. Math., 92, Birkhaeuser Boston, Boston, MA, 1990.

Una clase de ejemplos: cocientes por grupos finitos
AFLS

Teorema

Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Sea $G \subset \mathrm{Aut}(V)$ un subgrupo finito de automorfismos de V. Entonces $HH^\bullet(D(V)^G) = HH^{\mathrm{ev}}(D(V)^G)$ y

$$\dim_{\mathbb{C}} HH^{2k}(D(V)^G) = \nu_{n-k}(G)$$

para cada $k \geq 0$, con

$$\nu_k(G) = \left|\{\langle g\rangle \in \langle G\rangle : 1 \text{ es autovalor de } g \text{ de multiplicidad } k\}\right|$$

- J. Alev, M. Farinati, Th. Lambre, A. Solotar. Homologie des invariants d'une algèbre de Weyl sous l'action d'un groupe fini. J. Algebra **232** (2000), no. 2, 564–577.

Una clase de ejemplos: cocientes por grupos finitos
AFLS

Teorema

Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Sea $G \subset \mathrm{Aut}(V)$ un subgrupo finito de automorfismos de V. Entonces $HH^\bullet(D(V)^G) = HH^{\mathrm{ev}}(D(V)^G)$ y

$$\dim_{\mathbb{C}} HH^{2k}(D(V)^G) = \nu_{n-k}(G)$$

para cada $k \geq 0$, con

$$\nu_k(G) = \left|\{\langle g\rangle \in \langle G\rangle : 1 \text{ es autovalor de } g \text{ de multiplicidad } k\}\right|$$

- J. Alev, M. Farinati, Th. Lambre, A. Solotar. Homologie des invariants d'une algèbre de Weyl sous l'action d'un groupe fini. J. Algebra **232** (2000), no. 2, 564–577.

Una clase de ejemplos: cocientes por grupos finitos

Para el caso particular del esquema de Hilbert de puntos $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2) \to V/S_n$, se conocía la estructura aditiva de la cohomología de $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ (... usando alta tecnología: la conjeturas de Weil, teoremas de Saito sobre descomposición de la cohomología, la teoría de estructuras mixtas de Hodge)

- L. Goettsche. Hilbert schemes of zero-dimensional subschemes of smooth varieties. Lecture Notes in Mathematics, **1572**. Springer-Verlag, Berlin, 1994. x+196 pp.
- L. Goettsche, W. Soergel, Wolfgang. Perverse sheaves and the cohomology of Hilbert schemes of smooth algebraic surfaces. Math. Ann. **296** (1993), no. 2, 235–245.
- M. A. de Cataldo, L. Migliorini. The Douady space of a complex surface. Adv. Math. **151** (2000), no. 2, 283–312.

Una clase de ejemplos: cocientes por grupos finitos

. . . y se tenia *fenomenológicamente*:

Proposición

Hay un isomorfismo de espacios vectoriales graduados

$$HH^\bullet(D(V)^G) \cong H^\bullet(\mathrm{Hilb}^n(C^2))$$

Una clase de ejemplos: cocientes por grupos finitos

A ambos lados del isomorfismo

$$HH^\bullet(D(V)^G) \cong H^\bullet(\mathrm{Hilb}^n(C^2))$$

hay álgebras.

Para $H^\bullet(\mathrm{Hilb}^n(C^2))$ se había calculado explicitamente la estructura multiplicativa solamente cuando $n \leq 3$ y algoritmicamente.

- B. Fantechi, L. Goettsche. The cohomology ring of the Hilbert scheme of 3 points on a smooth projective variety. J. Reine Angew. Math. **439** (1993), 147–158.
- M. Lehn. Chern classes of tautological sheaves on Hilbert schemes of points on surfaces. Invent. Math. **136** (1999), no. 1, 157–207.

Una clase de ejemplos: cocientes por grupos finitos

Sea $G \subset \mathrm{Aut}(G)$ un grupo finito de automorfismos y sea $\mathbb{C}G$ el álgebra de grupo de G.
Sea F la filtración sobre $\mathbb{C}G$ tal que

$$F_i\mathbb{C}G = \left\langle g \in G : \begin{array}{c} 1 \text{ es autovalor de } g \\ \text{de multiplicidad al menos } n-i \end{array} \right\rangle$$

Lema

F es una filtración de álgebras sobre $\mathbb{C}G$.

Una clase de ejemplos: cocientes por grupos finitos

Sea $G \subset \mathrm{Aut}(G)$ un grupo finito de automorfismos y sea $\mathbb{C}G$ el álgebra de grupo de G.
Sea F la filtración sobre $\mathbb{C}G$ tal que

$$F_i\mathbb{C}G = \left\langle g \in G : \begin{array}{c} 1 \text{ es autovalor de } g \\ \text{de multiplicidad al menos } n-i \end{array} \right\rangle$$

Lema

F es una filtración de álgebras sobre $\mathbb{C}G$.

Una clase de ejemplos: cocientes por grupos finitos

Por restricción, la filtración F de $\mathbb{C}G$ induce una filtración sobre el centro $\mathcal{Z}(G)$ de $\mathbb{C}G$.

Teorema

Sea $G \subset \operatorname{Aut}(V)$ un grupo finito de automorfismos del espacio vectorial V. Entonces hay un isomorfsmo

$$H^{\bullet/2}(D(V)^G) \cong \operatorname{gr}_\bullet \mathcal{Z}(G)$$

de álgebras.

- M. Suárez-Alvarez. Algebra structure on the Hochschild cohomology of the ring of invariants of a Weyl algebra under a finite group. J. Algebra **248** (2002), no. 1, 291–306.

Una clase de ejemplos: cocientes por grupos finitos

Teorema

Si $V = (\mathbb{C}^2)^n$ y $G = S_n$ es el grupo simétrico actuando de manera tautológica, y sea

$$\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2) \to V/G$$

es la resolución dada por el esquema de Hilbert. Entonces hay un isomorfismo de álgebras graduadas

$$H^{\bullet/2}(\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C})) \cong \mathrm{gr}_\bullet \mathcal{Z}(G).$$

- É. Vasserot. Sur l'anneau de cohomologie du schema de Hilbert de $\mathbb{C}^2$. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 332 (2001), no. 1, 7–12.