Álgebras de Calabi-Yau a partir de sistemas de triples de Steiner

Mariano Suárez-Alvarez
mariano@dm.uba.ar

19 de septiembre, 2013

Álgebras de Calabi-Yau

Sistemas de triples de Steiner

Un sistema de triples de Steiner es un par (E, S) con

- E un conjunto finito de **puntos** y
- S una familia de conjuntos de 3 elementos de E, los **bloques**,

tales que

cada par de puntos de E está contenido
en un único bloque

Sistemas de triples de Steiner

Un sistema de triples de Steiner es un par (E, S) con

- E un conjunto finito de **puntos** y
- S una familia de conjuntos de 3 elementos de E, los **bloques**,

tales que

cada par de puntos de E está contenido en un único bloque

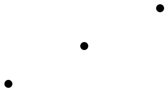
Sistemas de triples de Steiner

Un sistema de triples de Steiner es un par (E, S) con

- E un conjunto finito de **puntos** y
- S una familia de conjuntos de 3 elementos de E, los **bloques**,

tales que

cada par de puntos de E está contenido en un único bloque



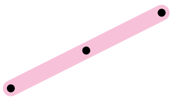
Sistemas de triples de Steiner

Un sistema de triples de Steiner es un par (E, S) con

- E un conjunto finito de **puntos** y
- S una familia de conjuntos de 3 elementos de E, los **bloques**,

tales que

cada par de puntos de E está contenido en un único bloque



Sistemas de triples de Steiner

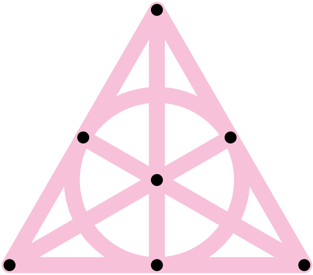
Ejemplos

$P^2(\mathbb{F}_2)$

$A^2(\mathbb{F}_3)$

Sistemas de triples de Steiner

Ejemplos

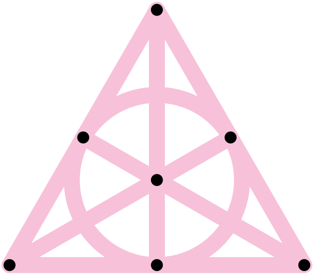


$P^2(\mathbb{F}_2)$

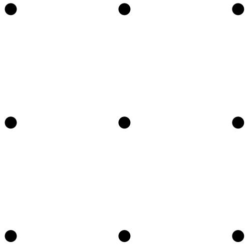
$A^2(\mathbb{F}_3)$

Sistemas de triples de Steiner

Ejemplos



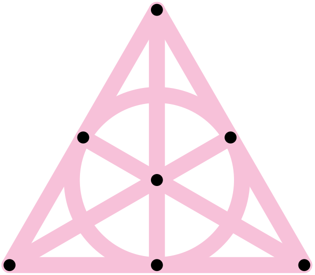
$P^2(\mathbb{F}_2)$



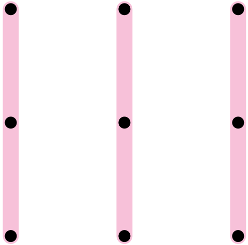
$A^2(\mathbb{F}_3)$

Sistemas de triples de Steiner

Ejemplos



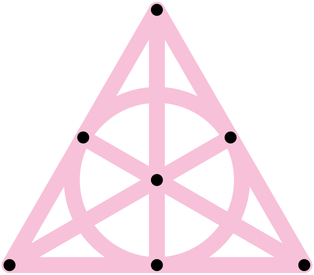
$P^2(\mathbb{F}_2)$



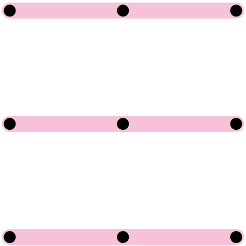
$A^2(\mathbb{F}_3)$

Sistemas de triples de Steiner

Ejemplos



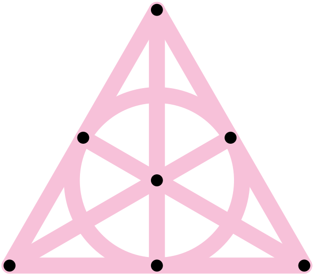
$P^2(\mathbb{F}_2)$



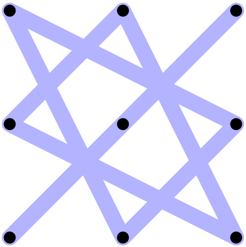
$A^2(\mathbb{F}_3)$

Sistemas de triples de Steiner

Ejemplos



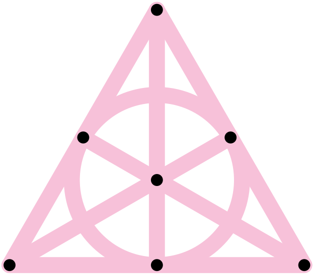
$P^2(\mathbb{F}_2)$



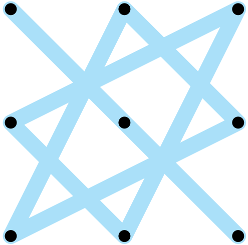
$A^2(\mathbb{F}_3)$

Sistemas de triples de Steiner

Ejemplos



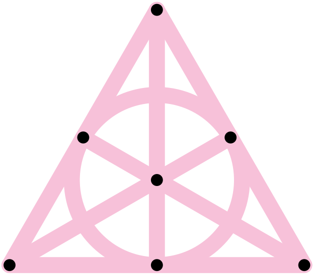
$P^2(\mathbb{F}_2)$



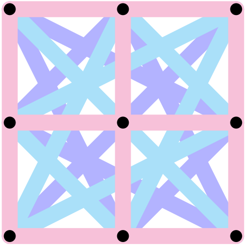
$A^2(\mathbb{F}_3)$

Sistemas de triples de Steiner

Ejemplos



$P^2(\mathbb{F}_2)$



$A^2(\mathbb{F}_3)$

Teorema (Kirkman)

Hay un sistema de triples de Steiner de orden n sii $n \equiv 1$ *o* $3 \bmod 6$

n	STS distintos
7	1
9	1
11	2
15	80
19	11 084 874 829

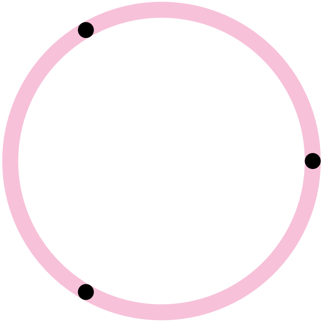
Teorema (Kirkman)

Hay un sistema de triples de Steiner de orden n sii $n \equiv 1$ o $3 \mod 6$

n	STS distintos
7	1
9	1
11	2
15	80
19	11 084 874 829

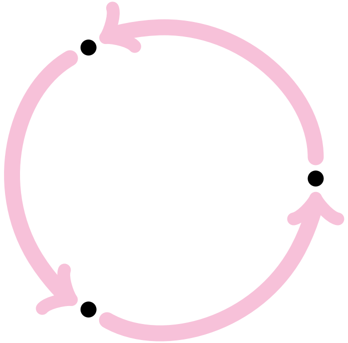
Sistemas de triples de Steiner

Orientaciones



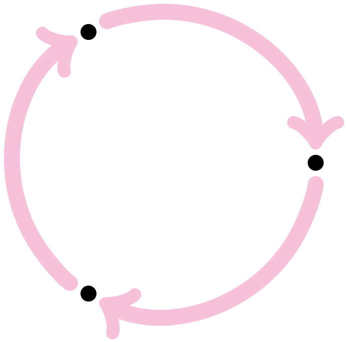
Sistemas de triples de Steiner

Orientaciones



Sistemas de triples de Steiner

Orientaciones



Un potencial

Si (E, S) es un sistema de triples de Steiner orientado, ponemos

$$V = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{x_i : i \in E\}$$

$$\epsilon_{i,j,k} = \begin{cases} 0, & \text{si } \{i,j,k\} \notin S \\ +1, & \text{si } i \rightsquigarrow j \rightsquigarrow k \rightsquigarrow i \\ -1, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\Phi = \sum_{i,j,k \in E} \epsilon_{i,j,k}\, x_i x_j x_k \in V^{\otimes 3} \subseteq T(V)$$

Un potencial

Si (E, S) es un sistema de triples de Steiner orientado, ponemos

$$V = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{x_i : i \in E\}$$

$$\epsilon_{i,j,k} = \begin{cases} 0, & \text{si } \{i,j,k\} \notin S \\ +1, & \text{si } i \rightsquigarrow j \rightsquigarrow k \rightsquigarrow i \\ -1, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\Phi = \sum_{i,j,k \in E} \epsilon_{i,j,k}\, x_i x_j x_k \in V^{\otimes 3} \subseteq T(V)$$

Un potencial

Si (E, S) es un sistema de triples de Steiner orientado, ponemos

$$V = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{x_i : i \in E\}$$

$$\epsilon_{i,j,k} = \begin{cases} 0, & \text{si } \{i,j,k\} \notin S \\ +1, & \text{si } i \rightsquigarrow j \rightsquigarrow k \rightsquigarrow i \\ -1, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\Phi = \sum_{i,j,k \in E} \epsilon_{i,j,k}\, x_i x_j x_k \in V^{\otimes 3} \subseteq T(V)$$

Un potencial

Derivadas cíclicas

$$\frac{{}^{\circ}\partial}{\partial c}\, abcde = deab$$

$$\frac{{}^{\circ}\partial}{\partial a}\left(abc - bac + bca - cba + cab - acb\right)$$
$$= bc - cb + bc - cb + bc - cb = 3[b, c]$$

$$\frac{{}^{\circ}\partial}{\partial x_k}\,\Phi = 3 \sum_{i \rightsquigarrow j \rightsquigarrow k} [x_i, x_j]$$

Un potencial

Derivadas cíclicas

$$\frac{{}^\circ\partial}{\partial c}\, ab{\color{red}c}de = deab$$

$$\frac{{}^\circ\partial}{\partial a}\Big(abc - bac + bca - cba + cab - acb\Big)$$
$$= bc - cb + bc - cb + bc - cb = 3[b, c]$$

$$\frac{{}^\circ\partial}{\partial x_k}\,\Phi = 3\sum_{i \rightsquigarrow j \rightsquigarrow k} [x_i, x_j]$$

Un potencial

Derivadas cíclicas

$$\frac{{}^\circ\partial}{\partial c}\, ab{\color{red}c}de = deab$$

$$\frac{{}^\circ\partial}{\partial a}\Big(abc - bac + bca - cba + cab - acb\Big)$$
$$= bc - cb + bc - cb + bc - cb = 3[b,c]$$

$$\frac{{}^\circ\partial}{\partial x_k}\,\Phi = 3\sum_{i\rightsquigarrow j\rightsquigarrow k}[x_i, x_j]$$

Un potencial

Derivadas cíclicas

$$\frac{^\circ\partial}{\partial c}\, ab\color{red}{c}\color{black}{de} = deab$$

$$\frac{^\circ\partial}{\partial a}\left(abc - bac + bca - cba + cab - acb\right)$$
$$= bc - cb + bc - cb + bc - cb = 3[b, c]$$

$$\frac{^\circ\partial}{\partial x_k}\Phi = 3\sum_{i \rightsquigarrow j \rightsquigarrow k}[x_i, x_j]$$

Un potencial

Derivadas cíclicas

$$\frac{^\circ\partial}{\partial c}\, ab\textcolor{red}{c}de = deab$$

$$\frac{^\circ\partial}{\partial a}\left(abc - bac + bca - cba + cab - acb\right)$$
$$= bc - cb + bc - cb + bc - cb = 3[b,c]$$

$$\frac{^\circ\partial}{\partial x_k}\,\Phi = 3\sum_{i \rightsquigarrow j \rightsquigarrow k} [x_i, x_j]$$

Un álgebra

$$A = A(\Phi) = \frac{T(V)}{\left(\frac{{}^{\circ}\partial \Phi}{\partial x_i} : i \in E \right)}$$

Teorema

El álgebra A es

- *un dominio de integridad graduado conexo y cuadrático,*
- *Koszul de dimensión global* 3*,*
- *Gorenstein,*
- *Calabi-Yau,*
- *no noetheriana pero coherente.*

Un álgebra

$$A = A(\Phi) = \frac{T(V)}{\left(\dfrac{{}^{\circ}\partial\Phi}{\partial x_i} : i \in E\right)}$$

Teorema

El álgebra A es

- *un dominio de integridad graduado conexo y cuadrático,*
- *Koszul de dimensión global* 3*,*
- *Gorenstein,*
- *Calabi-Yau,*
- *no noetheriana pero coherente.*

Un álgebra

Teorema

Si Λ es el álgebra cociente de

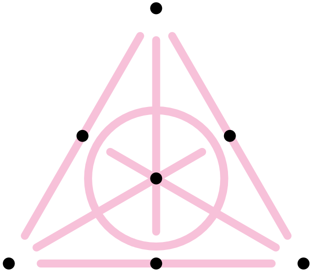
$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left, "u_1"] \arrow[r, bend right, "u_n"'] \arrow[r, phantom, "\vdots"] & \bullet \arrow[r, bend left, "v_1"] \arrow[r, bend right, "v_n"'] \arrow[r, phantom, "\vdots"] & \bullet \end{tikzcd}$$

módulo el ideal generado por los elementos

$$\rho_k = \sum_{(i,j,k)\in S} (v_i u_j - v_j u_i), \qquad k \in E.$$

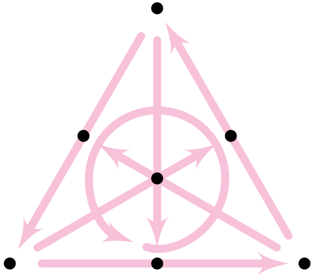
entonces $D^b(\operatorname{mod}\Lambda) \cong D^b(\operatorname{cohProj} A)$.

Un ejemplo



S. P. Smith
A 3-Calabi-Yau algebra with G_2 symmetry constructed from the octonions
`arXiv:1104.3824`

Un ejemplo



S. P. Smith
A 3-Calabi-Yau algebra with G_2 symmetry constructed from the octonions
`arXiv:1104.3824`