El argumento de Hilton-Eckmann para productos cup

arXiv:math.KT/0209029

Mariano Suarez-Alvarez
mariano@dm.uba.ar

Lema

Sea M un conjunto, y supongamos que

$$\bullet : M \times M \to M \qquad y \qquad \circ : M \times M \to M$$

son dos operaciones en M tales que

(i) $(M, \bullet)$ *y* $(M, \circ)$ *son monoides unitarios, y*

(ii) $\bullet$ *es un morfismo de monoides para* $\circ$*, es decir*

$$(x \bullet y) \circ (z \bullet w) = (x \circ z) \bullet (y \circ w)$$

Entonces $\bullet = \circ$ *y* $\bullet$ *es conmutativo.*

B. Eckmann, P. J. Hilton, Group-like structures in categories, *Ann. of Math* **145** (1962), 227–255.

Definición

Una categoría monoidal es una 6-tupla $(\mathsf{C}, \otimes, e, a, l, r)$ *en la que*

- C *es una categoría y* $e \in \operatorname{obj} \mathsf{C}$ *es un objeto;*
- $? \otimes ? : \mathsf{C} \times \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ *es un bifunctor;*
- $a : (? \otimes ?) \otimes ? \to ? \otimes (? \otimes ?)$ *es un isomorfismo de functores* $\mathsf{C} \times \mathsf{C} \times \mathsf{C} \to \mathsf{C}$*;*
- $l : e \otimes ? \to ?$ *y* $r : ? \otimes e \to ?$ *son isomorfismos de functores* $\mathsf{C} \to \mathsf{C}$,

tales que si x, y, z *y* $w \in \operatorname{obj} \mathsf{C}$, *conmutan*

$$\begin{tikzcd}
(x \otimes (y \otimes z)) \otimes w \arrow[dd, "a"'] & ((x \otimes y) \otimes z) \otimes w \arrow[l, "a \otimes 1"'] \arrow[d, "a"] \\
& (x \otimes y) \otimes (z \otimes w) \arrow[d, "a"] \\
x \otimes ((y \otimes z) \otimes w) \arrow[r, "1 \otimes a"] & x \otimes (y \otimes (z \otimes w))
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(x \otimes e) \otimes y \arrow[rr, "a"] \arrow[dr, "r \otimes 1"'] & & x \otimes (e \otimes y) \arrow[dl, "1 \otimes l"] \\
& x \otimes y &
\end{tikzcd}$$

Lema

$l = r : e \otimes e \longrightarrow e$

Proposición

Si $(\mathsf{C}, \otimes, e, a, l, r)$ *es una categoría monoidal,* $(\mathrm{end}_{\mathsf{C}}(e), \circ)$ *es un monoide conmutativo.*

Definición

Una categoría monoidal suspendida es una 9-upla $(\mathsf{C}, \otimes, e, a, l, r, T, \lambda, \rho)$ *tal que* $(\mathsf{C}, \otimes, e, a, r, l)$ *es una categoría monoidal,* $T : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ *es un automorfismo, y*

$$\lambda : ? \otimes T? \to T(? \otimes ?) \qquad\qquad \rho : T? \otimes ? \to T(? \otimes ?)$$

son isomorfismos de functores $\mathsf{C} \times \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ *tales que si* x *e* $y \in \operatorname{obj} \mathsf{C}$*, conmutan*

$$\begin{tikzcd} e \otimes Tx \arrow[r, "l"] \arrow[d, "\lambda"'] & Tx \arrow[d, "1"] \\ T(e \otimes x) \arrow[r, "Tl"] & Tx \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Tx \otimes e \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\rho"'] & Tx \arrow[d, "1"] \\ T(x \otimes e) \arrow[r, "Tr"] & Tx \end{tikzcd}$$

y anti-conmuta

$$\begin{tikzcd} Tx \otimes Ty \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\lambda"'] & T(x \otimes Ty) \arrow[d, "T\lambda"] \\ T(Tx \otimes y) \arrow[r, "T\rho"] & T^2(x \otimes y) \end{tikzcd}$$

Teorema

Sea $(\mathsf{C}, \otimes, e, a, l, r, T, \lambda, \rho)$ *una categoría monoidal suspendida, y pongamos*

$$\operatorname{end}_C^T(e) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \hom_C(e, T^p e).$$

Si $f : e \to T^p e$ *y* $g : e \to T^q e$*, definimos*

$$f \cdot g = T^q f \circ g : e \to T^{p+q} e.$$

Entonces $(\operatorname{end}_C^T(e), \cdot)$ *es un anillo conmutativo.*

Demostración. Si $f : e \to T^p e$ y $g : e \to T^q e$, sea $f \star g : e \to T^{p+q} e$ la composición

$$e \xrightarrow{r^{-1}} e \otimes e \xrightarrow{f \otimes g} T^p e \otimes T^q e \xrightarrow{\rho_p}$$

$$\longrightarrow T^p(e \otimes T^q e) \xrightarrow{T^p \lambda_q} T^{p+q}(e \otimes e) \xrightarrow{T^{p+q} l} T^{p+q} e$$

$$
\begin{tikzcd}
e \arrow[d, "f"'] & e \otimes e \arrow[l, "r"'] \arrow[d, "f \otimes 1"'] \arrow[dr, "f \otimes g"] & & \\
T^p e \arrow[d, "1"'] & T^p e \otimes e \arrow[l, "r"'] \arrow[r, "1 \otimes g"] \arrow[d, "\rho_p"'] & T^p e \otimes T^q e \arrow[d, "\rho_p"'] & \\
T^p e \arrow[dr, "1"'] & T^p(e \otimes e) \arrow[l, "T^p r"'] \arrow[r, "T^p(1 \otimes g)"] \arrow[d, "T^p l"'] & T^p(e \otimes T^q e) \arrow[d, "T^p l"'] \arrow[dr, "T^p \lambda_q"] & \\
 & T^p e \arrow[r, "T^p g"] & T^{p+q} e & T^{p+q}(e \otimes e) \arrow[l, "T^{p+q} l"']
\end{tikzcd}
$$

$$\therefore f \star g = g \cdot f$$

$$
\begin{tikzcd}
e & e \otimes e \arrow[l, shift right, "r"'] \arrow[l, shift left, "l"] \arrow[d, "1\otimes g"'] \arrow[dr, bend left, "f\otimes g"] & & \\
T^q e \arrow[d, "1"'] \arrow[from=u, "g"'] & e \otimes T^q e \arrow[l, "l"'] \arrow[r, "f\otimes 1"] \arrow[d, "\lambda_q"'] & T^p e \otimes T^q e \arrow[r, "\rho_p"] \arrow[d, "\lambda_q"'] \arrow[dr, phantom, "(-1)^{pq}"] & T^p(e \otimes T^q e) \arrow[d, "T^p\lambda_q"] \\
T^q e \arrow[dr, bend right, "1"'] & T^q(e \otimes e) \arrow[l, "T^q l"'] \arrow[r, "T^q(f\otimes 1)"] \arrow[d, "T^q r"'] & T^q(T^p e \otimes e) \arrow[r, "T^q\rho_p"] \arrow[d, "T^q r"'] & T^{p+q}(e \otimes e) \arrow[d, "T^{p+q} l"] \arrow[dl, "T^{p+q} r"] \\
 & T^q e \arrow[r, "T^q f"'] & T^{p+q} e \arrow[r, "1"'] & T^{p+q} e
\end{tikzcd}
$$

$$\therefore g \star f = (-1)^{pq} f \cdot g$$

Aplicaciones

- Si $(\mathsf{C}, \otimes, e, a, l, r)$ es una categoría monoidal sobre una categoría C exacta y $\otimes$ es un functor exacto, $\mathsf{D}^b(C)$ tiene una estructura inducida de categoría monoidal suspendida, asi que

$$\operatorname{Ext}^\bullet_{\mathsf{C}}(e, e) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \hom_{\mathsf{D}^b(\mathsf{C})}(e, T^p e)$$

es conmutativo para el producto $\cdot$

  - $\mathsf{C} = {}_H\mathsf{Mod}$ con H de Hopf $\rightsquigarrow \operatorname{Ext}^\bullet_H(k, k)$
  - $\mathsf{C} = {}^H\mathsf{Mod}$ con H de Hopf $\rightsquigarrow \operatorname{Ext}^\bullet_H(k, k)$
  - Idem, pero con H una quasi-biálgebra.

Aplicaciones

- Si $\otimes$ en la situación de partida no es exacto, pero es derivable...
  - $\mathsf{C} = {}_A\mathrm{Mod}_A$ con A un álgebra $\rightsquigarrow HH^\bullet(A)$
  - $\mathsf{C} = {}^C\mathrm{Mod}^C$ con C una coálgebra $\rightsquigarrow HH^\bullet(C)$

Aplicaciones

- R. Taillefer, `arXiv:math.KT/0207154`
  Si H es un álgebra de Hopf, $\mathcal{M} = {}_H^H\mathrm{Mod}_H^H$ es una categoría monoidal con respecto a $\otimes_H$ con objeto neutro H. Luego $\mathrm{Ext}^{\bullet}_{\mathcal{M}}(H, H)$ es conmutativo.