Espectros de grafos

Mariano Suárez-Álvarez

12 de mayo, 2015

Grafos

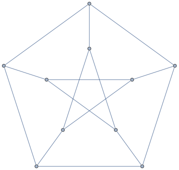
Un grafo es un par $\Gamma = (V, E)$ con

- V un conjunto finito de vértices
- $E \subseteq V \times V$ un conjunto simétrico e irreflexivo de lados

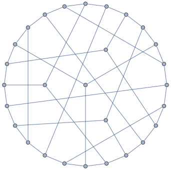
Grafos

Un grafo es un par $\Gamma = (V, E)$ con

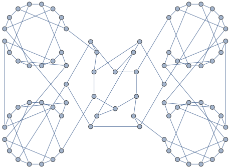
- V un conjunto finito de vértices
- $E \subseteq V \times V$ un conjunto simétrico e irreflexivo de lados



Petersen



Coxeter



Ellingham-Horton 78

Matriz de adyacencia

La matriz de adyacencia de Γ es la matriz $A = (a_{i,j})_{i,j \in V}$ con filas y columnas indexadas por los vértices y tal que

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i \sim j \text{ en } \Gamma; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Matriz de adyacencia

La matriz de adyacencia de Γ es la matriz $A = (a_{i,j})_{i,j \in V}$ con filas y columnas indexadas por los vértices y tal que

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i \sim j \text{ en } \Gamma; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Petersen

Matriz de adyacencia

Lema

Si $\ell \geq 0$ *e* $i, j \in V$, *entonces* $(A^\ell)_{i,j}$ *es la cantidad de caminos de* i *a* j *en* Γ *de longitud* ℓ.

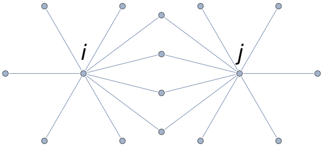
Matriz de adyacencia

Lema

Si $\ell \geq 0$ e $i, j \in V$, entonces $(A^\ell)_{i,j}$ es la cantidad de caminos de i a j en Γ de longitud ℓ.

Por ejemplo,

$$(A^2)_{i,j} = \sum_{k \in V} a_{i,k} a_{k,j}$$



El espectro

El polinomio característico χ_Γ de Γ es el de la matriz A.

El espectro σ_Γ de Γ es el multiconjunto de los autovalores de A.

El espectro

El polinomio característico χ_Γ de Γ es el de la matriz A.

El espectro σ_Γ de Γ es el multiconjunto de los autovalores de A.

$$\chi = t^{10} - 15t^8 + 75t^6 - 24t^5 - 165t^4 + 120t^3 + 120t^2 - 160t + 48$$
$$\sigma = \{3, 1, 1, 1, 1, 1, -2, -2, -2, -2\}$$

Petersen

El espectro

$$
\begin{aligned}
\chi = t^{28} &- 42t^{26} + 777t^{24} - 8344t^{22} - 48t^{21} + 57666t^{20} + 1232t^{19} \\
&- 268716t^{18} - 13104t^{17} + 860314t^{16} + 74256t^{15} - 1893960t^{14} \\
&- 239568t^{13} + 2827965t^{12} + 433776t^{11} - 2790970t^{10} - 396816t^{9} \\
&+ 1772925t^{8} + 118192t^{7} - 719376t^{6} + 44352t^{5} + 170464t^{4} \\
&- 37632t^{3} - 16128t^{2} + 7168t - 768
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma = \{&3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1, \\
&\sqrt{2}-1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1-\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}, \\
&-1-\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}\}
\end{aligned}
$$

Coxeter

El espectro

Como A es real y simétrica sus autovalores son reales.

Podemos ordenarlos en orden decreciente:

$$\theta_1 \geq \theta_2 \geq \cdots \geq \theta_n$$

Componentes conexas

Proposición

Si $\Gamma = \Gamma_1 \sqcup \cdots \sqcup \Gamma_r$ *es la descomposición de* Γ *como unión disjunta de componentes conexas, entonces*

$$\sigma_\Gamma = \sigma_{\gamma_1} \cup \cdots \cup \sigma_{\gamma_r}$$

como multiconjunto.

Componentes conexas

Proposición

Si $\Gamma = \Gamma_1 \sqcup \cdots \sqcup \Gamma_r$ *es la descomposición de* Γ *como unión disjunta de componentes conexas, entonces*

$$\sigma_\Gamma = \sigma_{\gamma_1} \cup \cdots \cup \sigma_{\gamma_r}$$

como multiconjunto.

Ordenando de manera adecuada los vértices de Γ es

$$A_\Gamma = \begin{pmatrix} A_{\Gamma_1} & & & \\ & A_{\Gamma_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{\Gamma_r} \end{pmatrix}$$

El número de autovalores distintos

Proposición

Si Γ *es conexo de diámetro* d*, entonces* Γ *tiene al menos* $d+1$ *autovalores distintos.*

El número de autovalores distintos

Proposición

Si Γ es conexo de diámetro d, entonces Γ tiene al menos $d+1$ autovalores distintos.

Sea t el número de autovalores distintos de A.
Como es diagonalizable, el polinomio minimal de A tiene grado t y existen $\alpha_0, \ldots, \alpha_{t-1} \in \mathbb{R}$ tales que

$$A^t = a_0 + a_1 A + \cdots a_{t-1} A^{t-1}.$$

El número de autovalores distintos

Proposición

Si Γ es conexo de diámetro d, entonces Γ tiene al menos $d+1$ autovalores distintos.

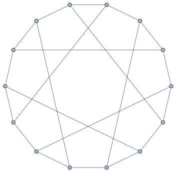
Sea t el número de autovalores distintos de A.
Como es diagonalizable, el polinomio minimal de A tiene grado t y existen $\alpha_0, \ldots, \alpha_{t-1} \in \mathbb{R}$ tales que

$$A^t = a_0 + a_1 A + \cdots a_{t-1} A^{t-1}.$$

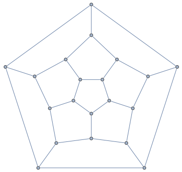
Supongamos que $t \leq d$ y sean $i, j \in V$ tales que $\mathrm{dist}(i,j) = d$.
Hay caminos $i \rightsquigarrow j$ de longitud d pero no más cortos.
Mirando la entrada (i,j)ésima en las matrices de la ecuación llegamos a un absurdo.

Grafos regulares

Un grafo es regular de grado k si todos los vértices tienen exactamente k vecinos .



Heawood



Dodecaedro

El primer autovalor

Proposición

Supongamos que Γ es conexo.

- *Si Γ es regular de grado k, entonces $\theta_1 = k$.*

El primer autovalor

Proposición

Supongamos que Γ es conexo.

- *Si Γ es regular de grado k, entonces $\theta_1 = k$.*

La hipótesis implica que $A\mathbf{1} = k\mathbf{1}$.
Si $t > k$, entonces la matriz $tI - A$ es *estrictamente diagonalmente dominante*, así que es inversible[1].

[1] Taussky, Olga. "A recurring theorem on determinants". The American Mathematical Monthly, Vol. 56, No. 10, 672–676. JSTOR 2305561.

El primer autovalor

Proposición

Supongamos que Γ *es conexo.*

- *Si* Γ *es regular de grado* k*, entonces* $\theta_1 = k$.
- *Si no, es* $k_{\min} < \overline{k} < \theta_1 < k_{\max}$*, con* $k_{\min}$*,* $k_{\max}$ *y* $\overline{k}$ *el grado mínimo, máximo y promedio de los vértices de* Γ.

En cualquier caso, θ_1 *es un autovalor simple.*

El primer autovalor

Corolario

Si Γ es regular, la multiplicidad de θ_1 como autovalor es la cantidad de componentes conexas de Γ.

El teorema de Perron-Frobenius

Teorema

Sea $T \geq 0$ una matriz irreducible. Hay un único $\theta_1 > 0$ tal que

- *Hay un vector $x_1 > 0$ tal que $Tx = \theta_1 x_1$.*
- *θ_1 es un autovalor simple de T geométrica y algebraicamente.*
- *Si θ es un autovalor de T, entonces $|\theta| \leq \theta_1$.*
- *Si $x \in \mathbb{R}^n$ y $\theta \in \mathbb{R}$ son tales que $0 \neq x \geq 0$ y $Tx \geq \theta x$, entonces $x > 0$ y $\theta \leq \theta_1$. Es $Tx = \theta x$ sii $\theta = \theta_1$.*
- *Si $x \in \mathbb{R}^n$ y $\theta \in \mathbb{R}$ son tales que $0 \neq x \geq 0$ y $Tx \leq \theta x$, entonces $x > 0$ y $\theta \geq \theta_1$. Es $Tx = \theta x$ sii $\theta = \theta_1$.*

T es irreducible si

$$\text{para cada } i, j \in \{1, \ldots, n\} \text{ existe } k \text{ tal que } (T^k)_{i,j} > 0.$$

Por ejemplo, A_Γ es irreducible sii Γ es conexo.

El primer autovalor

Proposición

Supongamos que Γ *es conexo.*

- *Si* Γ *es regular de grado* k*, entonces* $\theta_1 = k$.
- *Si no, es* $k_{\min} < \overline{k} < \theta_1 < k_{\max}$*, con* $k_{\min}$*,* $k_{\max}$ *y* $\overline{k}$ *el grado mínimo, máximo y promedio de los vértices de* Γ.

En cualquier caso, θ_1 *es un autovalor simple.*

El primer autovalor

Tenemos que $A\mathbf{1} \leq k_{\max}\mathbf{1}$ así que PF nos dice que $\theta_1 \leq k_{\max}$.

Si vale la igualdad, entonces $A\mathbf{1} = k_{\max}\mathbf{1}$ y Γ es regular de grado k.

Si $\mathbf{1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ con $\{x_1, \dots, x_n\}$ una base ortonormal de autovectores, entonces

$$n\overline{k} = \mathbf{1}^t A\mathbf{1} = \sum \alpha_i^2 \theta_i \leq \sum \alpha_i^2 \theta_1 = n\theta_1.$$

Si vale la igualdad, entonces

$$\sum \alpha_i^2(\theta_1 - \theta_i) = 0.$$

Como θ_1 es simple, vemos que $\mathbf{1} = x_1$ y que Γ es regular.

El primer autovalor

Corolario

Un grafo Γ es regular sii $\sum_{i=1}^{n} \theta_i^2 = n\theta_1$.

Si el grafo es regular de grado k, es $\theta_1 = k$ y

$$\sum \theta_i^2 = \operatorname{tr} A^2 = kn$$

Recíprocamente, si vale la condición entonces

$$\overline{k} = \frac{1}{n} \operatorname{tr} A^2 = \frac{1}{n} \sum \theta_i^2 = \theta_1$$

el grafo es regular por la proposicón.

El primer autovalor

Sea $T \geq 0$ una matriz irreducible.

Proposición

Si $T \geq S \geq 0$ y σ es un autovalor de S, entonces $|\sigma| \leq \theta_1$.
Si vale la igualdad, entonces $S = T$.

El primer autovalor

Sea $T \geq 0$ una matriz irreducible.

Proposición

Si $T \geq S \geq 0$ y σ es un autovalor de S, entonces $|\sigma| \leq \theta_1$.
Si vale la igualdad, entonces $S = T$.

Sean $x \geq 0$ y $\sigma \in \mathbb{R}$ tales que $Sx = \sigma x$. Es

$$T|x| \geq S|x| \geq |\sigma| \cdot |x|$$

así que PF nos dice que $|\sigma| \leq \theta_1$.
Si vale la igualdad, PF implica que $|\sigma| = \theta_1$, que $|x| > 0$ y que $T|x| = |\sigma||x|$ y de la desigualda de arriba vemos que

$$(T - S)|x| = 0,$$

de manera que $T = S$.

El primer autovalor

Sea $T \geq 0$ una matriz irreducible.

Proposición

Si $T \geq S \geq 0$ y σ es un autovalor de S, entonces $|\sigma| \leq \theta_1$.
Si vale la igualdad, entonces $S = T$.

Corolario

Si S es un menor principal de T y σ es un autovalor de S, entonces $|\sigma| < \theta_1$.

El primer autovalor

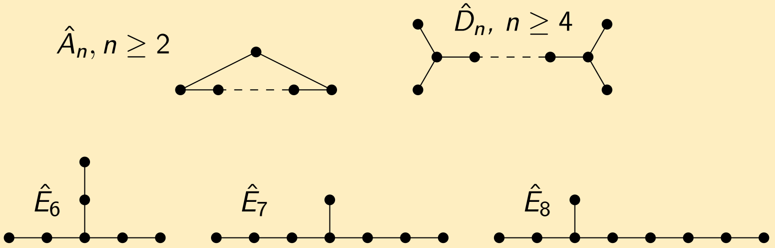
Proposición

Sea Γ *un grafo conexo.*
Si Γ' *se obtiene de* Γ *sacando un lado o un vértice,*
entonces $\theta_1(\Gamma') < \theta_1(\Gamma)$.

El primer autovalor

Teorema

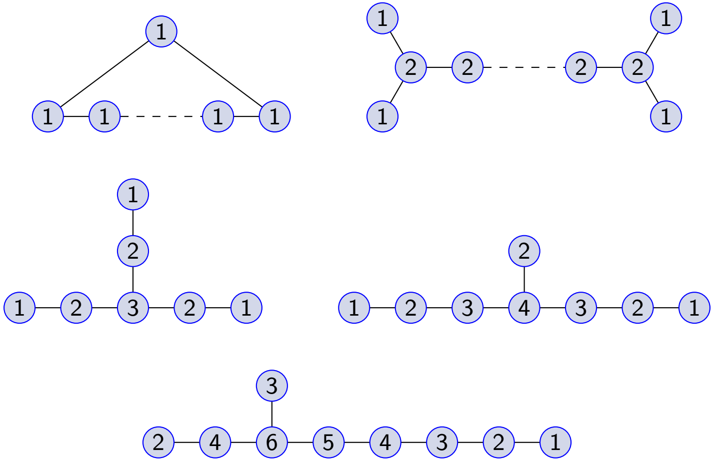
Si Γ *es un grafo conexo con* $\theta_1 = 2$*, entonces es uno de*



Estos grafos son los diagramas de Dynkin extendidos.
El subíndice más 1 es la cantidad de vértices.

El primer autovalor

Estos son autovectores correspondientes al autovalor 2:



El primer autovalor

Como estos autovectores son positivos de autovalor positivo,
FP implica que 2 es primer autovalor .

Un grafo que se obtenga agregando arcos o vértices tiene primer autovalor estrictamente más grande.

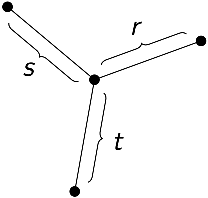
Si un grafo conexo de primer autovalor 2 no es $\tilde{A}_n$ o $\tilde{D}_n$, entonces

- es un árbol
- sus vértices tienen grado a lo sumo 3
- tiene a lo sumo un vértice de grado 3.

El primer autovalor

Si no tiene vértices de grado 3, entonces es un subgrafo propio de $\tilde{A}_n$, lo que es imposible.

El grafo es de la forma



Sin pérdida de generalidad
$1 \leq r \leq s \leq t$

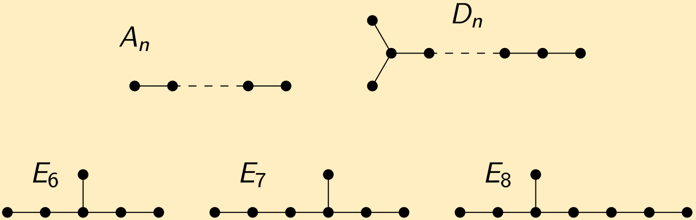
Si $r \geq 2 \ldots$ $\tilde{E}_6$.

&c

El primer autovalor

Teorema

Si Γ es un grafo conexo con $\theta_1 < 2$, entonces es uno de



Estos grafos son los diagramas de Dynkin.
El subíndice es a la cantidad de vértices.

Número de independencia

El número de independencia $\alpha(\Gamma)$ es el maximo cardinal de un conjunto de vértices no-adyacentes dos a dos.

Proposición

$\alpha(G) \leq |\{i : \theta_i \geq 0\}|$ *y* $\alpha(G) \leq |\{i : \theta_i \leq 0\}|$

El número cromático

El número cromático $\chi(\Gamma)$ es el menor número de colores necesarios para pintar los vértices de un grafo de manera que no haya dos vértices adyacentes del mismo color.

Proposición

Sea Γ *conexo con algún arco.*

- $\chi(\Gamma) \leq 1 + \theta_1$.
  Vale la igualdad sii Γ *es completo o un ciclo impar.*
- $\chi(\Gamma) \geq 1 - \frac{\theta_1}{\theta_n}$.