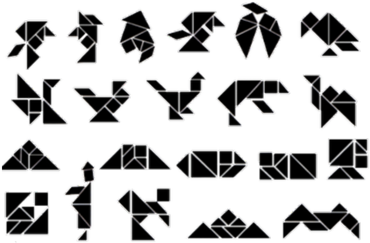
Cortar y pegar

Mariano Suárez-Alvarez
mariano@dm.uba.ar

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

9 de noviembre, 2012

Dos polígonos en el plano son **equivalentes** si se pueden descomponer en el mismo número finito de polígonos de interiores disjuntos congruentes.



Polígonos en el plano

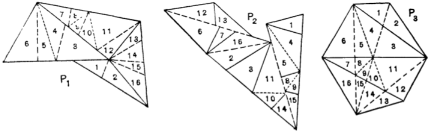
Teorema (W. Wallace, 1807; F. Bolyai, 1933; P. Gerwien, 1835)

Dos polígonos son equivalentes sii tienen la misma área

Polígonos en el plano

Teorema (W. Wallace, 1807; F. Bolyai, 1933; P. Gerwien, 1835)

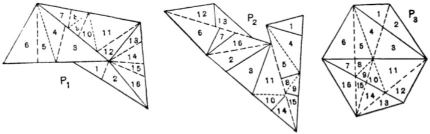
Dos polígonos son equivalentes sii tienen la misma área



Polígonos en el plano

Teorema (W. Wallace, 1807; F. Bolyai, 1933; P. Gerwien, 1835)

Dos polígonos son equivalentes sii tienen la misma área



Demostración.

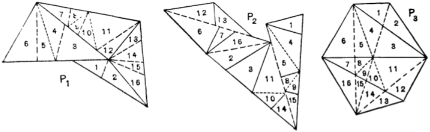
- Todo polígono puede ser triangulado.

□

Polígonos en el plano

Teorema (W. Wallace, 1807; F. Bolyai, 1933; P. Gerwien, 1835)

Dos polígonos son equivalentes sii tienen la misma área



Demostración.

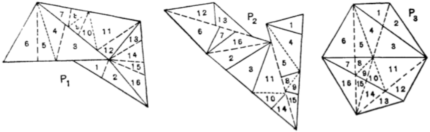
- Todo polígono puede ser triangulado.
- Todo triángulo es equivalente a un paralelogramo.

□

Polígonos en el plano

Teorema (W. Wallace, 1807; F. Bolyai, 1933; P. Gerwien, 1835)

Dos polígonos son equivalentes sii tienen la misma área



Demostración.

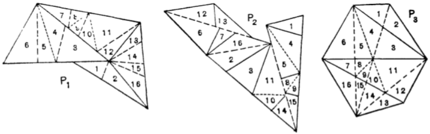
- Todo polígono puede ser triangulado.
- Todo triángulo es equivalente a un paralelogramo.
- Todo paralelogramo es equivalente a un rectángulo.

□

Polígonos en el plano

Teorema (W. Wallace, 1807; F. Bolyai, 1933; P. Gerwien, 1835)

Dos polígonos son equivalentes sii tienen la misma área



Demostración.

- Todo polígono puede ser triangulado.
- Todo triángulo es equivalente a un paralelogramo.
- Todo paralelogramo es equivalente a un rectángulo.
- Todo rectángulo es equivalente a otro de altura unidad.

□

Polígonos en el plano

Dos polígonos en el plano son **BT-equivalentes** si se pueden descomponer en el mismo número finito de subconjuntos disjuntos congruentes.

Polígonos en el plano

Dos polígonos en el plano son **BT-equivalentes** si se pueden descomponer en el mismo número finito de subconjuntos disjuntos congruentes.

Teorema (St. Banach, A. Tarski, 1924)

Dos polígonos en el plano son equivalentes sii son BT-equivalentes.

Polígonos en el plano

En el teorema de Banach-Tarski es importante que se trate de polígonos.

Problema (A. Tarski, 1925)

¿Son un disco y un cuadrado de la misma área BT-equivalentes?

Polígonos en el plano

En el teorema de Banach-Tarski es importante que se trate de polígonos.

Problema (A. Tarski, 1925)

¿Son un disco y un cuadrado de la misma área BT-equivalentes?

Teorema (M. Laczkovich, 1990)

Sí, usando unas 10^{50} partes.

Se puede hacer usando solamente translaciones y de forma continua.
También prueba que un polígono es equivalente a un cuadrado usando solamente translaciones.

Polígonos en el plano

¿A quién le importa?

Polígonos en el plano

¿A quién le importa?

- Por ejemplo, a Euclides!
- D. Hilbert, en su *Foundations of Geometry*, construye la teoría del área apoyándose en W-B-G.

Polígonos en el plano

¿Que significa «construir la teoría del área»?

Polígonos en el plano

¿Que significa «construir la teoría del área»?

El semigrupo $\mathcal{P}_+(\mathbb{R}^2)$.

- Generadores: $[P]$ con P un polígono.
- Relaciones:
  - $[P] = [P']$ si P y P' son congruentes.
  - $[P] = [P_1] + [P_2]$ si $P = P_1 \sqcup P_2$.

Polígonos en el plano

¿Que significa «construir la teoría del área»?

El semigrupo $\mathcal{P}_+(\mathbb{R}^2)$.

- Generadores: $[P]$ con P un polígono.
- Relaciones:
  - $[P] = [P']$ si P y P' son congruentes.
  - $[P] = [P_1] + [P_2]$ si $P = P_1 \sqcup P_2$.

Hay una función canónica

$$\mu : \text{Polígonos de } \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_+(\mathbb{R}^2)$$

Polígonos en el plano

La función μ tiene una propiedad universal:

Teorema

Si μ : Polígonos de $\mathbb{R}^2 \to G$ es una función con valores en un (semi)grupo abeliano tal que

- *si P y P' son polígonos congruentes, entonces $\nu(P) = \nu(P)$, y*
- *Si P se descompone como unión de P_1 y P_2, entonces $\nu(P) = \nu(P_1) + \nu(P_2)$,*

entonces hay exactamente un homomofismo $\bar{\nu} : \mathcal{P}_+(\mathbb{R}^2) \to G$ tal que

$$\nu = \bar{\nu} \circ \mu.$$

Por ejemplo, $\nu =$ área.

Polígonos en el plano

Teorema

Hay un isomorfismo $\mathcal{P}_+(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{R}_{\geq 0}$.

De hecho, si

$$\nu = \text{área} : \text{Polígonos de } \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0},$$

entonces la propiedad universal nos da un homomofismo $\bar{\nu} : \mathcal{P}_+(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Este es un isomorfismo.

Poliedros en el espacio

Euclides prueba en el primer volumen de sus Elementos:

Teorema (Proposición 39, Libro I)

Dos triángulos con la misma base tienen la misma área sii tienen la misma altura.

Poliedros en el espacio

Euclides prueba en el primer volumen de sus Elementos:

Teorema (Proposición 39, Libro I)

Dos triángulos con la misma base tienen la misma área sii tienen la misma altura.

En 1844, C. F. Gauss observa que

dos pirámides con la misma base y la misma altura tienen el mismo volumen.

pero solo lo sabe probar vía un argumento de «exhaución», y pregunta

Problema

¿Es posible dar un argumento finito?

Poliedros en el espacio

D. Hilbert incluye el problema, aunque asumiendo que la respuesta es negativa, como tercer problema de la lista que presentó en el Congreso Internacional de Matemáticos de 1900.

> *In two letters to Gerling, Gauss expresses his regret that certain theorems of solid geometry depend upon the method of exhaustion, i.e., in modern phraseology, upon the axiom of continuity (or upon the axiom of Archimedes). Gauss mentions in particular the theorem of Euclid, that triangular pyramids of equal altitudes are to each other as their bases. Now the analogous problem in the plane has been solved. Gerling also succeeded in proving the equality of volume of symmetrical polyhedra by dividing them into congruent parts. Nevertheless, it seems to me probable that a general proof of this kind for the theorem of Euclid just mentioned is impossible, and it should be our task to give a rigorous proof of its impossibility.* ***This would be obtained, as soon as we succeeded in specifying two tetrahedra of equal bases and equal altitudes which can in no way be split up into congruent tetrahedra, and which cannot be combined with congruent tetrahedra to form two polyhedra which themselves could be split up into congruent tetrahedra.***

Poliedros en el espacio

El mismo año, Max Dehn probó

Teorema

Un cubo y un tetraedro regular del mismo volumen no son equivalentes.

Poliedros en el espacio

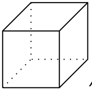
El invariante de Dehn

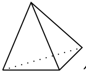
$$D : \text{Poliedros de } \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$$

Si P es un poliedro,

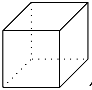
$$D(P) = \sum_{e \text{ lado}} \text{long}(e) \otimes (\theta(e) + \pi\mathbb{Z}).$$

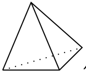
Poliedros en el espacio

$D\Big($  $\Big) = 12 \cdot 1 \otimes \frac{\pi}{2} = 0$

$D\Big($  $\Big) = 6 \cdot 2^{1/2} 3^{1/3} \otimes \arccos \frac{1}{3} \overset{?}{\neq} 0$

Poliedros en el espacio

$D\Bigg($  $\Bigg) = 12 \cdot 1 \otimes \frac{\pi}{2} = 0$

$D\Bigg($  $\Bigg) = 6 \cdot 2^{1/2} 3^{1/3} \otimes \arccos \frac{1}{3} \overset{?}{\neq} 0$

Hay una sobreyección

$$\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}$$

así que basta mostrar que $\alpha = \arccos \frac{1}{3} \notin \pi\mathbb{Q}$.

Poliedros en el espacio

Por recurrencia usando

$$\cos(k+1)\alpha + \cos(k-1)\alpha = 2\cos k\alpha\,\cos\alpha$$

se ve que

$$\cos k\alpha = \frac{a_k}{3^k} \qquad 3 \nmid a_k \in \mathbb{Z}.$$

Poliedros en el espacio

Teorema (J. P. Sydler, 1965)

Dos poliedros en $\mathbb{R}^3$ son equivalentes sii tienen el mismo volumen y el mismo invariante de Dehn.

Referencias

[1] David Hilbert, *Mathematical problems*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **37** (2000), no. 4, 407–436 (electronic), DOI 10.1090/S0273-0979-00-00881-8. Reprinted from Bull. Amer. Math. Soc. **8** (1902), 437–479. MR1779412

[2] ______, *Foundations of geometry*, Second edition. Translated from the tenth German edition by Leo Unger, Open Court, LaSalle, Ill., 1971. MR0275262 (43 #1019)

[3] Stefan Banach and Alfred Tarski, *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes.*, Fund. math. **6** (1924), 244–277.

[4] Miklós Laczkovich, *Equidecomposability and discrepancy; a solution of Tarski's circle-squaring problem*, J. Reine Angew. Math. **404** (1990), 77–117, DOI 10.1515/crll.1990.404.77. MR1037431 (91b:51034)

[5] J.-P. Sydler, *Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions*, Comment. Math. Helv. **40** (1965), 43–80 (French). MR0192407 (33 #632)