La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ y algunas de sus reordenaciones

Mariano Suárez-Alvarez

5 de abril, 2006

La serie y su suma

Lema 1. *Si $t \geq 0$, $\ln(1+t) \leq t$.*

Demostración. Es

$$\ln(1+t) = \int_1^{1+t} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq \int_1^{1+t} \mathrm{d}x = t$$

porque $\frac{1}{x} \leq 1$ si $x \in [1, 1+t]$. Esto prueba el lema. $\square$

Lema 2. *Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales positivos tal que existe $\lim_{n\to\infty} a_n$ finito y positivo, entonces $\lim_{n\to\infty} \ln a_n$ existe y es*

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \ln \lim_{n\to\infty} a_n. \tag{1}$$

Demostración. Supongamos que $0 < x \leq y$. Entonces

$$0 \leq \ln y - \ln x = \ln \frac{y}{x} = \ln\left(1 + \frac{y-x}{x}\right) \leq \frac{y-x}{x},$$

en vista del lema anterior.

Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$; por hipótesis es $\alpha > 0$. Existe N tal que si $n \geq N$, es $|a_n - \alpha| < \alpha\varepsilon/2$ y $a_n > \alpha/2$.

Sea $n \geq N$. Si $a_n \leq \alpha$, es

$$0 \leq \ln \alpha - \ln a_n \leq \frac{\alpha - a_n}{a_n} \leq 2\frac{|\alpha - a_n|}{\alpha} < \varepsilon,$$

mientras que si $a_n > \alpha$,

$$0 \leq \ln a_n - \ln \alpha \leq \frac{a_n - \alpha}{\alpha} \leq 2\frac{|\alpha - a_n|}{\alpha} < \varepsilon,$$

de manera que vemos que en cualquier caso es

$$|\ln a_n - \ln \alpha| \leq \varepsilon.$$

Esto nos dice que existe $\lim_{n\to\infty} \ln a_n$ y vale (1). $\square$

Proposición 3. *Si $n \in \mathbb{N}$, sea*

$$r_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Entonces existe $\gamma = \lim_{n\to\infty} r_n$ finito.

Este número es la *constante de Euler-Mascheroni*, fue introducido por Leonard Euler [1] en 1735 y sus primeros 65 dígitos decimales son:

$$0{,}57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576723488\ldots$$

La convergencia de la sucesión $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a γ es extremadamente lenta. Por ejemplo, para obtener los 65 dígitos decimales anteriores es necesario considerar r_n con $n \geq 10^{50}$. Se conocen, sin embargo, muchos métodos más efectivos para el cálculo de γ. En 1999, Xavier Gourdon y Pierre Demichel calcularon en los primeros 100 millones de dígitos decimales.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Es

$$\ln n = \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x} = \sum_{i=1}^{n-1} \int_i^{i+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}.$$

Luego

$$r_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln n \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} = \frac{1}{n} \geq 0,$$

y esto nos dice que $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada inferiormente. Por otro lado,

$$r_{n+1} - r_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq 0,$$

de manera que $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decrece.

Vemos así que la sucesión es convergente. □

Proposición 4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2.$

Demostración. El criterio de Leibniz se aplica trivialmente a esta serie para mostrar que converge.

Si $N \in \mathbb{N}$, sea

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Queremos calcular $\lim_{N\to\infty} S_N$; como sabemos que existe el límite, bastará calcular el límite $\lim_{N\to\infty} S_{2N-1}$ de la subsucesión de $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ de los términos de índice impar. Ahora bien,

$$S_{2N-1} = \sum_{n=0}^{2N-1} \frac{(-1)^n}{n+1},$$

y esto es, separando los términos positivos de los negativos,

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2n+1} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n};$$

sumando y restando ahora $\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2n}$, vemos que esto es

$$\begin{aligned} &= \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2n+1} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2n} \right) - \left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2n} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2n} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{2N-1} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Si $r_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$, entonces podemos reescribir esto:

$$\begin{aligned} S_{2N-1} &= r_{2N-1} - r_{N-1} + \ln(2N-1) - \ln(N-1) \\ &= r_{2N-1} - r_{N-1} + \ln\left(1 + \frac{n}{n-1}\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Recordemos que $\lim_{n\to+\infty} r_n = \gamma$, la constante de Euler-Mascheroni. Por otro lado, el segundo lema nos permite rápidamente ver que

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{n}{n-1}\right) = \ln 2.$$

Con todo esto, podemos tomar límite en (2), y ver que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} &= \lim_{N\to+\infty} r_{2N-1} - \lim_{N\to+\infty} r_{N-1} \\ &\qquad + \lim_{N\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{n}{n-1}\right) \\ &= \gamma - \gamma + \ln 2 = \ln 2. \end{aligned}$$

□

Reordenaciones

Sean $a, b \in \mathbb{N}$. Consideremos la serie que se obtiene reordenando a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

de manera que después de a términos positivos sigan b términos negativos. Por ejemplo, si $a = 1$ y $b = 2$, la serie reordenada es

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \cdots$$

Es fácil ver que tenemos la siguiente expresión para su término general u_n. Sea $n \geq 0$ y sean $q, r \geq 0$ tales que $n = (a+b)q + r$ y $0 \leq r < a + b$; entonces es

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2(qa+r)+1}, & \text{si } 0 \leq r < a; \\ -\dfrac{1}{2(qb+r-a)}, & \text{si } a \leq r < a+b. \end{cases}$$

Proposición 5. *La serie con término general u_n converge y es*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{1}{2} \ln \frac{4a}{b}. \tag{3}$$

Demostración. Si $N \in \mathbb{N}_0$, escribimos

$$S(N) = \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

Es

$$\begin{aligned} S\big((N+1)(a+b)-1\big) &= \sum_{q=0}^{N} \sum_{r=0}^{a+b-1} u_{(a+b)q+r} \\ &= \sum_{q=0}^{N} \left(\sum_{r=0}^{a-1} \frac{1}{2(qa+r)+1} - \sum_{r=0}^{b-1} \frac{1}{2(qb+r)} \right) \end{aligned}$$

Ahora bien, es

$$\begin{aligned} \sum_{q=0}^{N} \sum_{r=0}^{a-1} \frac{1}{2(qa+r)+1} &= \sum_{n=0}^{2(N+1)a-1} \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{(N+1)a-1} \frac{1}{n} \\ &= r_{2(N+1)a-1} + \ln\big(2(N+1)a-1\big) \\ &\qquad - \frac{1}{2} r_{(N+1)a-1} - \frac{1}{2} \ln\big((N+1)a-1\big) \end{aligned}$$

y, por otro lado,

$$\sum_{q=0}^{N} \sum_{r=0}^{b-1} \frac{1}{2(qb+r)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{(N+1)b-1} \frac{1}{n} = \frac{1}{2} r_{(N+1)b-1} + \frac{1}{2} \ln\big((N+1)b-1\big).$$

Usando esto, vemos que

$$\begin{aligned} &S\big((N+1)(a+b)-1\big) = \\ &\quad = r_{2(N+1)a-1} - \frac{1}{2} r_{(N+1)a-1} - \frac{1}{2} r_{(N+1)b-1} \\ &\qquad\qquad + \ln\big(2(N+1)a-1\big) - \frac{1}{2} \ln\big((N+1)a-1\big) \\ &\qquad\qquad\qquad - \frac{1}{2} \ln\big((N+1)b-1\big) \\ &\quad = r_{2(N+1)a-1} - \frac{1}{2} r_{(N+1)a-1} - \frac{1}{2} r_{(N+1)b-1} \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{2} \ln \frac{\big(2(N+1)a-1\big)^2}{\big((N+1)a-1\big)\big((N+1)b-1\big)}. \end{aligned}$$

Ahora bien, es fácil ver que

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\big(2(N+1)a-1\big)^2}{\big((N+1)a-1\big)\big((N+1)b-1\big)} = \frac{4a}{b},$$

así que si tomamos límite en la expresión obtenida para $S\big((N+1)(a+b)-1\big)$, usando el lema 2 y la proposición 3, vemos que

$$\lim_{N\to\infty} S\big((N+1)(a+b)-1\big) = \frac{1}{2}\ln\frac{4a}{b}.$$

Como claramente $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, podemos deducir la proposición del siguiente lema. □

Lema 6. *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *una serie tal que* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *y existen* $q \in \mathbb{N}$ *y* $r \in \mathbb{N}_0$ *tales que existe*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{qN+r} a_n = \alpha.$$

Entonces la serie converge, y es

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \alpha.$$

Demostración. Dejamos esto como ejercicio para el lector. □

Referencias

[1] L. Euler, Inventio summae cuiusque seriei ex dato termino generali, *Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae* (1736)
`http://math.dartmouth.edu/~euler/docs/originals/E047.pdf`