REPRESENTACIONES DE ÁLGEBRAS DE LIE

MARIANO SUÁREZ-ALVAREZ

Índice

Date: 18 de julio, 2008; compiled: 14 de mayo de 2015.

1. Álgebras de Lie y módulos

1.1. Álgebras de Lie

1.1.1. Fijemos un cuerpo k.

{p:def:lie} **1.1.2.** Un *álgebra de Lie* sobre k es un par $(\mathfrak{g}, [-,-])$ en el que $\mathfrak{g}$ es un k-espacio vectorial y $[-,-] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es una aplicación k-bilineal tal que

{eq:anti} $$[x, x] = 0 \tag{1}$$

y

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

cualesquiera sean x, y, $z \in \mathfrak{g}$.

1.1.3. La condición (1) implica que $[-,-]$ es una aplicación antisimétrica. En efecto, si x, $y \in \mathfrak{g}$, entonces

$$0 = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = [x, y] + [y, x],$$

de manera que

{eq:anti:2} $$[y, x] = -[x, y]. \tag{2}$$

Recíprocamente, cuando la característica del cuerpo k es diferente de 2 la condición (2) implica a (1).

1.1.4. Usaremos la misma notación $[-,-]$ para el producto de todas las álgebras de Lie, así que desde ahora dejaremos de explicitarla y diremos simplemente que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie.

1.1.5. Si $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ son álgebras de Lie, un *morfismo de álgebras de Lie* $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ es una aplicación k-lineal tal que

$$[f(x), f(y)] = f([x, y])$$

siempre que x, $y \in \mathfrak{g}$.

1.1.6. Es inmediato verificar que las álgebras de Lie sobre k y sus morfismos determinan una categoría Lie_k.

1.1.7. Si $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}$ son subespacios de un álgebra de Lie, notamos $[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2]$ al subespacio de $\mathfrak{g}$ generado por $\{[x, y] : x \in \mathfrak{h}_1, y \in \mathfrak{h}_2\}$.

1.1.8. Si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ es un subespacio tal que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, decimos que $\mathfrak{h}$ es un *ideal* de $\mathfrak{g}$.

1.1.9. Proposición. *Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ álgebras de Lie.*

(i) *Todo ideal de $\mathfrak{g}$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$.*
(ii) *Si $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ es un morfismo de álgebras de Lie, entonces $\ker f$ es un ideal de $\mathfrak{g}$.*
(iii) *Recíprocamente, si $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$, hay una única estructura de álgebra de Lie sobre el cociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ de espacios vectoriales tal que la proyección canónica $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ es un morfismo de álgebras de Lie.*

Demostración. Las afirmaciones *(i)* y *(ii)* son imediatas. En cuanto a *(iii)*, es fácil ver que si definimos $[-,-] : \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \times \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ poniendo

$$[x + \mathfrak{h}, y + \mathfrak{h}] = [x, y] + \mathfrak{h}$$

siempre que x, $y \in \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ resulta un álgebra de Lie que satisface las condiciones del enunciado. □

1.2. Módulos

1.2.1. Fijemos un cuerpo k y una k-álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

1.2.2. Un $\mathfrak{g}$-*módulo* (o una *representación* de $\mathfrak{g}$) es un par (M, ρ) en el que M es un espacio vectorial y $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(M)$ es un morfismo de álgebras de Lie. Explícitamente, esta última condición dice que en $\mathfrak{gl}(M)$ es

$$[\rho(x), \rho(y)] = \rho([x, y])$$

siempre que x, $y \in \mathfrak{g}$.

1.2.3. Si (M, ρ) es un $\mathfrak{g}$-módulo y $m \in M$, $x \in \mathfrak{g}$, escribiremos $x \cdot m$, o a veces directamente xm, en lugar de $\rho(x)(m)$. Usando esta notación, la condición para que (M, ρ) sea un $\mathfrak{g}$-módulo es que se tenga

$$x \cdot (y \cdot m) - y \cdot (x \cdot m) = [x, y] \cdot m$$

para cada x, $y \in \mathfrak{g}$ y cada $m \in M$.

1.2.4. Si (M, ρ_M) y (N, ρ_N) son $\mathfrak{g}$-módulos, entonces un morfismo de $\mathfrak{g}$-módulos $f : M \to N$ es una aplicación lineal tal que para cada $x \in \mathfrak{g}$ es

$$\rho_N(x) \circ f = f \circ \rho_M(x) : M \to M.$$

Esto sucede sii

$$x \cdot f(m) = f(x \cdot m)$$

cualesquiera sean $x \in \mathfrak{g}$ y $m \in M$. Escribimos $\mathsf{hom}_g(M, N)$ al conjunto de todos los morfismos de $\mathfrak{g}$-módulos de M a N. Es claro que se trata de un subespacio vectorial de $\mathsf{hom}(M, N)$.

1.2.5. Es fácil ver que los $\mathfrak{g}$-módulos y los morfismos de $\mathfrak{g}$-módulos forman una categoría, a la que notamos ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$. Sea, además, ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$ la subcategoría plena determinada por los $\mathfrak{g}$-módulos de dimensión finita.

1.2.6. Proposición. *La categoría ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$ es abeliana y el functor de olvido ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod} \to {}_{k}\mathsf{Mod}$ es exato. Además, ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$ es una subcategoría abeliana.*

Demostración. Dejamos la verificación al lector. □

1.3. Cambio de álgebra

1.3.1. Sea $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ un morfismo de álgebras de Lie.

1.3.2. Si $(M, \rho_M) \in {}_{\mathfrak{g}'}\mathsf{Mod}$, sea $\varphi^*(M) = (M, \rho_M \circ \varphi)$. Se trata claramente de un objeto de ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$. Notemos que el $\mathfrak{g}$-módulo $\varphi^*(M)$ tiene el mismo espacio vectorial sbyacente que M.

1.3.3. Si, por otro lado, $f : (M, \rho_M) \to (N, \rho_N)$ es un morfismo de ${}_{\mathfrak{g}'}\mathsf{Mod}$, un cálculo directo muestra que la aplicación subyacente f determina un morfismo $\varphi^*(f) : \varphi^*(M) \to \varphi^*(N)$ de $\mathfrak{g}$-módulos.

1.3.4. Proposición. *Un morfismo de algebras de Lie $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ induce un functor $\varphi^* : {}_{\mathfrak{g}'}\mathsf{Mod} \to {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$ que es exacto y fiel, que se restringe a un functor exacto y fiel $\varphi^* : {}_{\mathfrak{g}'}\mathsf{mod} \to {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$.*

Demostración. La verificación de la functorialidad de φ^* es trivial. Por otro lado, como φ^* preserva los espacios vectoriales subyacentes a los objetos de ${}_{\mathfrak{g}'}\mathsf{Mod}$, es claro que $\varphi^*({}_{\mathfrak{g}'}\mathsf{mod}) \subseteq {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$. La exactitud y fidelidad de φ^* y de su restricción a ${}_{\mathfrak{g}'}\mathsf{mod}$ son inmediatas. □

1.4. $\mathfrak{g}$-módulos triviales

1.4.1. Si (M, ρ) es un $\mathfrak{g}$-módulo tal que la aplicación $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(M)$ es nula, decimos que M es un $\mathfrak{g}$-*módulo trivial*.

{p:triv} **1.4.2.** Es claro que cada espacio vectorial tiene una única estructura de $\mathfrak{g}$-módulo trivial. Más aún, podemos definir un functor

$$\mathsf{triv} : {}_k\mathsf{Mod} \to {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$$

de manera que, para cada $M \in {}_k\mathsf{Mod}$, sea $\mathsf{triv}\, M$ el $\mathfrak{g}$-módulo trivial que tiene a M como espacio vectorial subyacente y tal que triv es la identidad sobre los morfismos. Se trata claramente de un functor fiel, pleno y exacto.

1.4.3. En particular, el espacio vectorial k de dimensión 1 tiene una única estructura de $\mathfrak{g}$-módulo trivial. Cuando veamos a k como $\mathfrak{g}$-módulo, y a menos que digamos algo en contrario, será con esta estructura con la que lo consideraremos.

1.5. Invariantes

1.5.1. Si M es un $\mathfrak{g}$-módulo, notamos

$$M^{\mathfrak{g}} = \{m \in M : x \cdot m = 0 \text{ para todo } x \in \mathfrak{g}\}.$$

Llamamos a $M^{\mathfrak{g}}$ el *subespacio de $\mathfrak{g}$-invariantes de M*.

1.5.2. Proposición. *Sea $M \in {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$. Entonces $M^{\mathfrak{g}}$ es un $\mathfrak{g}$-submódulo trivial de M. Se trata, de hecho, del $\mathfrak{g}$-submódulo trivial maximal de M y coincide con la suma de todos los $\mathfrak{g}$-submódulo triviales de M.*

Demostración. Todo elemento de $M^{\mathfrak{g}}$ genera un $\mathfrak{g}$-submódulo trivial de dimensión 1 en M. La proposición sigue entonces de la siguiente afirmación evidente: si $(M_i)_{i \in I}$ es una familia de $\mathfrak{g}$-submódulos triviales de M, entonces $\sum_{i \in I} M_i$ también es un $\mathfrak{g}$-submódulo trivial de M. □

1.5.3. Sea $u : M \to N$ un morfismo de $\mathfrak{g}$-módulos. Si $m \in M^{\mathfrak{g}}$ y $x \in \mathfrak{g}$, entonces

$$x \cdot u(m) = u(x \cdot m) = u(0) = 0,$$

así que $u(m) \in N^{\mathfrak{g}}$. Vemos así que, por restricción, obtenemos una transformación lineal $u^{\mathfrak{g}} = u|_{M^{\mathfrak{g}}} : M^{\mathfrak{g}} \to N^{\mathfrak{g}}$.

{p:inv} **1.5.4. Proposición.** *Tenemos un functor*

$$(-)^{\mathfrak{g}} : {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod} \to {}_k\mathsf{Mod}.$$

Si $M \in {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$, hay un único isomorfismo natural

$$\varphi_M : \hom_{\mathfrak{g}}(k, M) \to M^{\mathfrak{g}}$$

tal que $\varphi_k(\mathrm{id}_k) = 1$.

Demostración. Es inmediato que $(\mathrm{id}_M)^{\mathfrak{g}} = \mathrm{id}_{M^{\mathfrak{g}}}$ para cada $M \in {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$, y que si $u : M \to N$ y $v : N \to P$ son morfismos de ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$, entonces $(v \circ u)^g = v^{\mathfrak{g}} \circ u^{\mathfrak{g}}$. s inmediato que $(\mathrm{id}_M)^{\mathfrak{g}} = \mathrm{id}_{M^{\mathfrak{g}}}$ para cada $M \in {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$, y que si $u : M \to N$ y $v : N \to P$ son morfismos de ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$, entonces $(v \circ u)^g = v^{\mathfrak{g}} \circ u^{\mathfrak{g}}$. Esto prueba la primera afirmación.

Sea ahora $M \in {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$. Si $f \in \hom_{\mathfrak{g}}(k, M)$, entonces

$$x \cdot f(1) = f(x \cdot 1) = f(0) = 0$$

cualquiera sea $x \in \mathfrak{g}$, de forma que $f(1) \in M^{\mathfrak{g}}$. Podemos definir, entonces, una aplicación

$$\varphi_M : f \in \mathsf{hom}_{\mathfrak{g}}(k, M) \mapsto f(1) \in M^{\mathfrak{g}}.$$

Esto depende naturalmente de M. En efecto, si $u : M \to N$ es un morfismo de $\mathfrak{g}$-módulos, es fácil verificar que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathsf{hom}_{\mathfrak{g}}(k, M) \arrow[r, "\varphi_M"] \arrow[d, "u_*"'] & M^{\mathfrak{g}} \arrow[d, "u^{\mathfrak{g}}"] \\ \mathsf{hom}_{\mathfrak{g}}(k, N) \arrow[r, "\varphi_N"] & N^{\mathfrak{g}} \end{tikzcd}$$

Ahora bien, es claro que si $f \in \mathsf{hom}_{\mathfrak{g}}(k, M)$ es tal que $\varphi_M(f) = f(1) = 0$, entonces $f = 0$, así que φ_M es inyectiva. Por otro lado, si $m \in M^{\mathfrak{g}}$, entonces existe una transformación lineal $f_m : \lambda \in k \mapsto \lambda m \in M$ y es fácil verificar que, de hecho, $f_m \in \mathsf{hom}_{\mathfrak{g}}(k, M)$. Como claramente $\varphi_M(f_m) = m$, concluimos que φ_M es sobreyectiva. Así, φ_M es un isomorfismo natural.

Supongamos, para terminar, que $\psi_M : \mathsf{hom}_{\mathfrak{g}}(k, M) \to M^{\mathfrak{g}}$ es un isomorfismo natural tal que $\psi_M(\mathrm{id}_k) = 1$. Sea $M \in {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$ y sea $f \in \mathsf{hom}_{\mathfrak{g}}(k, M)$. Entonces a naturalidad implica que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathsf{hom}_{\mathfrak{g}}(k, k) \arrow[r, "\psi_k"] \arrow[d, "f_*"'] & k^{\mathfrak{g}} \arrow[d, "f^{\mathfrak{g}}"] \\ \mathsf{hom}_{\mathfrak{g}}(k, M) \arrow[r, "\psi_M"] & M^{\mathfrak{g}} \end{tikzcd}$$

y, en particular,

$$\psi_M(f) = \psi_M(f_*(\mathrm{id}_M)) = f^{\mathfrak{g}}(\psi_k(\mathrm{id}_M)) = f^{\mathfrak{g}}(1) = f(1) = \varphi_M(f).$$

Luego $\psi_M = \varphi_M$. Esto prueba la afirmación sobre la unicidad del isomorfismo φ_M. □

1.5.5. Proposición. *El functor $(-)^{\mathfrak{g}}$ es adjunto a derecha del functor* triv *de* **1.4.2**, *es decir, hay un isomorfismo natural*

$$\alpha_{M,N} : \mathsf{hom}_{\mathfrak{g}}(\mathsf{triv}\, M, N) \to \mathsf{hom}(M, N^{\mathfrak{g}})$$

para $M \in {}_k\mathsf{Mod}$ y $N \in {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$.

Demostración. Es inmediato verificar que, de hecho, y en tanto subespacios de $\mathsf{hom}(M, N)$, se tiene que $\mathsf{hom}_{\mathfrak{g}}(\mathsf{triv}\, M, N) = \mathsf{hom}(M, N^{\mathfrak{g}})$, así que podemos tomar $\alpha_{M,N} = \mathrm{id}_{\mathsf{hom}(M,N^{\mathfrak{g}})}$. □

1.5.6. Como todo adjunto a derecha, el functor $(-)^{\mathfrak{g}}$ es exacto a izquierda. Explícitamente, esto nos dice que si

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta en ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$, entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow M'^{\mathfrak{g}} \longrightarrow M^{\mathfrak{g}} \longrightarrow M''^{\mathfrak{g}}$$

es exacta.

1.5.7. En general, sin embargo, el functor $(-)^{\mathfrak{g}}$ no es exacto. Por ejemplo, sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie abeliana de dimensión 1, generada por $h \in \mathfrak{g} \setminus 0$, y sea M el $\mathfrak{g}$-módulo de que tiene a $\{x, y\}$ como base y tal que

$$h \cdot x = y, \qquad\qquad h \cdot y = 0.$$

Entonces hay una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow k \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} k \longrightarrow 0$$

de $\mathfrak{g}$-módulos, en la que $f(\lambda) = \lambda y$ y $g(\lambda x + \mu y) = \lambda x$ siempre que λ, $\mu \in k$. Como $M^{\mathfrak{g}} = ky$ y, por supuesto, $k^{\mathfrak{g}} = k$, tomando invariantes obtenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow k \xrightarrow{f^{\mathfrak{g}}} ky \xrightarrow{0} k$$

que no puede ser completada con un 0 a la derecha, ya que $f^{\mathfrak{g}}$ es un isomorfismo.

1.6. Espacios de homomorfismos

{p:hom} **1.6.1.** Si M, N son $\mathfrak{g}$-módulos, sea $\mathsf{hom}(M, N)$, como siempre, el espacio de homomorfismos de espacios vectoriales de M a N, y consideremos la acción $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathsf{hom}(M, N))$ de $\mathfrak{g}$ sobre $\mathsf{hom}(M, N)$ dada por

$$(x \cdot f)(m) = x \cdot f(m) - f(x \cdot m)$$

si $x \in \mathfrak{g}$, $f \in \mathsf{hom}(M, N)$ y $m \in M$. Entonces $(\mathsf{hom}(M, N), \rho)$ es un $\mathfrak{g}$-módulo.

1.6.2. Si $u : M' \to M$ y $v : N \to N'$ son morfismos de $\mathfrak{g}$-módulos, entonces la aplicación lineal

$$\mathsf{hom}(u, v) : f \in \mathsf{hom}(M, N) \mapsto v \circ f \circ u \in \mathsf{hom}(M', N')$$

es un morfismo de $\mathfrak{g}$-módulos. En efecto, si $f \in \mathsf{hom}(M, N)$, $x \in \mathfrak{g}$, para cada $m \in M$ es

$$\begin{aligned}(x \cdot \mathsf{hom}(u, v)(f))(m) &= (x \cdot v \circ f \circ u)(m) \\ &= x \cdot v(f(u(m))) - v(f(u(x \cdot m)))\end{aligned}$$

y, como u y v son morfismos de $\mathfrak{g}$-módulos, esto es

$$\begin{aligned}&= v(x \cdot f(u(m))) - v(f(x \cdot u(m))) \\ &= v((x \cdot f)(u(m)) \\ &= (v \circ (x \cdot f) \circ u)(m) \\ &= \mathsf{hom}(u, v)(x \cdot f)(m).\end{aligned}$$

Así, es $x \cdot \mathsf{hom}(u, v)(f) = \mathsf{hom}(u, v)(x \cdot f)$.

{p:hom:fun} **1.6.3. Proposición.** *Tenemos un functor*

$$\mathsf{hom}(-, -) : {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}^{\mathrm{op}} \times {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod} \to {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}.$$

Este se restringe a un functor

$$\mathsf{hom}(-, -) : {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}^{\mathrm{op}} \times {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod} \to {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}.$$

Demostración. Si $M, N \in {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$, entonces es $\mathsf{hom}(\mathrm{id}_M, \mathrm{id}_N) = \mathrm{id}_{\mathsf{hom}(M,N)}$. Por otro lado, dados morfismos $u : M' \to M$, $u' : M'' \to M'$, $v : N \to N'$ y $v' : N' \to N''$, es

$$\mathsf{hom}(u', v') \circ \mathsf{hom}(u, v) = \mathsf{hom}(u \circ u', v' \circ v) : \mathsf{hom}(M, N) \to \mathsf{hom}(M'', N'').$$

Esto prueba la primera afirmación de la proposición. Queda solamente verificar que la restricción del functor $\mathsf{hom}(-, -)$ a ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}^{\mathrm{op}} \times {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$ toma valores en ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$, pero esto es evidente. □

1.6.4. El functor $\mathsf{hom}(-, -)$ es exacto tanto sobre ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$ como sobre ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$, esto es, siempre que

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta en ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$, y si $N \in {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$, son exactas las sucesiones

$$0 \longrightarrow \mathsf{hom}(N, M') \xrightarrow{f_*} \mathsf{hom}(N, M) \xrightarrow{g_*} \mathsf{hom}(N, M'') \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow \mathsf{hom}(M'', N) \xrightarrow{g^*} \mathsf{hom}(M, N) \xrightarrow{f^*} \mathsf{hom}(M', N) \longrightarrow 0$$

Esto sigue inmediatamente de la afirmación correspondiente para espacios vectoriales.

{p:homs} **1.6.5. Proposición.** *Si $M, N \in {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$, entonces*

{eq:homs}
$$\mathsf{hom}_{\mathfrak{g}}(M, N) = \mathsf{hom}(M, N)^{\mathfrak{g}}. \tag{3}$$

Demostración. La igualdad (3) de subespacios vectoriales de $\mathsf{hom}(M, N)$ puede verificarse directamente. □

1.7. Espacios duales

1.7.1. Si $M \in {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$, sea $M^* = \mathsf{hom}(M, k)$, con k el $\mathfrak{g}$-módulo trivial, dotado de su estructura de $\mathfrak{g}$-módulo construida como en **1.6.1**.

1.7.2. Especializando **1.6.3** obtenemos:

Proposición. *Tenemos un functor*

$$(-)^* : {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}^{\mathrm{op}} \to {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$$

que se restringe a un functor

$$(-)^* : {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}^{\mathrm{op}} \to {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$$ □

1.7.3. La restricción de este functor a la subcategoría ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$ tiene la siguiente propiedad importante:

Proposición. *El functor $(-)^* : {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}^{\mathrm{op}} \to {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$ es una dualidad involutiva.*

Demostración. Si $M \in {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$, hay un isomorfismo de espacios vectoriales, natural con respecto a morfismos de espacios vectoriales de dimensión finita,

$$\delta_M : M \to M^{**}$$

tal que $\delta_M(m)(\varphi) = \varphi(m)$ si $m \in M$ y $\varphi \in M^*$. Un cálculo directo muestra que se trata, de hecho, de un morfismo de $\mathfrak{g}$-módulos. □

1.8. Producto tensorial

1.8.1. Si M, $N \in {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$, sea $M \otimes N$ el producto tensorial de los subespacios subyacentes a M y a N, y consideremos la acción $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(M \otimes N)$ de $\mathfrak{g}$ sobre $M \otimes N$ dada por

$$x \cdot m \otimes n = (x \cdot m) \otimes n + m \otimes (x \cdot n)$$

cuando $x \in \mathfrak{g}$, $m \in M$, $n \in N$. Es rutina verificar que de esta forma hacemos de $M \otimes N$ un $\mathfrak{g}$-módulo.

1.8.2. Si $f : M \to M'$ y $g : N \to N'$ son morfismos de $\mathfrak{g}$-módulos, entonces la transformación lineal $f \otimes g : M \otimes N \to M' \otimes N'$ resulta un morfismo de $\mathfrak{g}$-módulos.

1.8.3. Proposición. *Tenemos un functor*

$$(-) \otimes (-) : {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod} \times {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod} \to {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$$

que se restringe a un functor

$$(-) \otimes (-) : {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod} \times {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod} \to {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}.$$

Demostración. Es evidente que si M, $N \in {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$, entonces $\mathrm{id}_M \otimes \mathrm{id}_N = \mathrm{id}_{M \otimes N}$ y que si $f : M \to M'$, $f' : M' \to M''$, $g : N \to N'$ y $g' : N' \to N''$ son morfismos de ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$, entonces $(f' \otimes g') \circ (f \circ g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g)$. Esto es consecuencia inmediata de las afirmaciones correspondientes para el producto tensorial de k-espacios vectoriales. Esto prueba la primera afirmación. La segunda sigue inmediatamente de la observación de que el producto tensorial de espacios vectoriales de dimensión finita tiene dimensión finita. □

1.8.4. El functor $(-) \otimes (-)$ es exacto sobre ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$ y sobre ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$, de manera que si

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta en ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$, y si $N \in {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$, entonces las sucesiones

$$0 \longrightarrow N \otimes M' \xrightarrow{\mathrm{id}_N \otimes f} N \otimes M \xrightarrow{\mathrm{id}_N \otimes g} N \otimes M'' \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_N} M \otimes N \xrightarrow{g \otimes \mathrm{id}_N} M'' \otimes N \longrightarrow 0$$

son exactas. Esto es una consecuencia inmediata del enunciado correspondiente para el producto tensorial de espacios vectoriales.

1.8.5. Las propiedades usuales del functor $\otimes$ de espacios vectoriales se extienden a nuestro contexto:

Proposición. *Existen isomorfismos naturales de functores*

$$\alpha_{M,N,P} : (M \otimes N) \otimes P \to M \otimes (N \otimes P),$$
$$\lambda_M : k \otimes M \to M,$$
$$\rho_M : M \otimes k \to M$$

y

$$\gamma_{M,N} : M \otimes N \to N \otimes M$$

tales que $({}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}, \otimes, k, \alpha, \lambda, \rho, \gamma)$ *y* $({}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}, \otimes, k, \alpha, \lambda, \rho, \gamma)$ *son k-categorías tensoriales simétricas.*

Desde ahora consideraremos a ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$ y a ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$ como categorías tensoriales simétricas con las estructuras de la proposición.

Demostración. Dados M, N, $P \in {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$, hay isomorfismos de espacios vectoriales

$$\begin{aligned}
&\alpha_{M,N,P} : (M \otimes N) \otimes P \to M \otimes (N \otimes P),\\
&\lambda_M : k \otimes M \to M,\\
&\rho_M : M \otimes k \to M,\\
&\gamma_{M,N} : M \otimes N \to N \otimes M
\end{aligned}$$

naturales con respecto a morfismos de espacios vectoriales, tales que si $m \in M$, $n \in N$, $p \in P$ y $\lambda \in k$, es

$$\begin{aligned}
&\alpha_{M,N,P}\big((m \otimes n) \otimes p\big) = m \otimes (n \otimes p),\\
&\lambda_M(\lambda \otimes m) = \lambda m,\\
&\rho_M(m \otimes \lambda) = \lambda m
\end{aligned}$$

y

$$\gamma_{M,N}(m \otimes n) = n \otimes m.$$

Es inmediato verificar que se trata, de hecho, de morfismos de $\mathfrak{g}$-módulos. La proposición sigue de la verificación, por cálculo directo, de la conmutatividad de los diagramas de **A.2.1**, **A.2.2**, **A.2.3** y de las condiciones de **A.2.7**. □

1.8.6. La relación de adjunción entre los functores $\otimes$ y hom de espacios vectoriales sigue valiendo:

{p:ot:adj} **Proposición.** *Sean M, N, $P \in {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$. Hay isomorfismos naturales de $\mathfrak{g}$-módulos*

$$a_{M,N,P} : \mathsf{hom}(M \otimes N, P) \to \mathsf{hom}(N, \mathsf{hom}(M, P)).$$

Éste induce, además, por restricción, un isomorfismo

$$\bar{a}_{M,N,P} = (a_{M,N,P})^{\mathfrak{g}} : \mathsf{hom}_{\mathfrak{g}}(M \otimes N, P) \to \mathsf{hom}_{\mathfrak{g}}(N, \mathsf{hom}(M, P)).$$

En otras palabras el functor $M \otimes (-) : {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod} \to {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$ es adjunto a derecha del functor $\mathsf{hom}(M, -) : {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod} \to {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$.

Demostración. Sabemos que hay un isomofismo natural *de espacios vectoriales*

$$a_{M,N,P} : \mathsf{hom}(M \otimes N, P) \to \mathsf{hom}(N, \mathsf{hom}(M, P))$$

tal que

$$a_{M,N,P}(f)(n)(m) = f(m \otimes n)$$

siempre que $f \in \mathsf{hom}(M \otimes N, P)$, $n \in N$, $m \in M$. Para verificar la primera afirmación de la proposición alcanza entonces con mostrar que $a_{M,N,P}$ es un morfismo de $\mathfrak{g}$-módulos: esto sigue de un cálculo directo.

Ahora, que $a_{M,N,P}$ se restringe a un isomorfismo $\bar{a}_{M,N,P}$ como en el enunciado es consecuencia de la functorialidad de $(-)^{\mathfrak{g}}$ y de que, de acuerdo a **1.6.5**,

$$\mathsf{hom}_{\mathfrak{g}}(M \otimes N, P) = \mathsf{hom}(M \otimes N, P)^{\mathfrak{g}}$$

y

$$\mathsf{hom}_{\mathfrak{g}}(N, \mathsf{hom}(M, P) =) \, \mathsf{hom}(N, \mathsf{hom}(M, P))^{\mathfrak{g}}.$$ □

1.8.7. Finalmente, observemos que cuando tratamos con $\mathfrak{g}$-módulos de dimensión finita, los tres functores $(-) \otimes (-)$, $\mathsf{hom}(-,-)$ y $(-)^*$ están íntimamente relacionados:

Proposición. *Sean M, $N \in {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$. Entonces hay isomorfismos naturales de $\mathfrak{g}$-módulos*

$$u_{M,N,P} : M^* \otimes N \to \mathsf{hom}(M,N)$$

y

$$v_{M,N,P} : M \otimes N \to \mathsf{hom}(M^*,N).$$

Demostración. La transformación natural de espacios vectoriales

$$u_{M,N} : M^* \otimes N \to \mathsf{hom}(M,N)$$

tal que

$$u_{M,N}(\varphi \otimes n)(m) = \varphi(m)n$$

si $\varphi \in M^*$, $n \in N$ y $m \in M$, es un isomorfismo. Es fácil verificar que se trata además de un morfismo de $\mathfrak{g}$-módulos.

De la misma forma, la transformación natural

$$v_{M,N,P} : M \otimes N \to \mathsf{hom}(M^*,N)$$

tal que $v_{M,N,P}(m \otimes n)(\varphi) = \varphi(m)n$ si $m \in M$, $n \in N$ y $\varphi \in M^*$, es un isomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos. □

{p:ot:change} **1.8.8. Proposición.** *Sea $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ un morfismo de álgebras de Lie. Entonces los functores de cambio de álgebra $\varphi^* : {}_{\mathfrak{g}'}\mathsf{Mod} \to {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$ y $\varphi^* : {}_{\mathfrak{g}'}\mathsf{mod} \to {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$ son functores tensoriales estrictos.*

Demostración. Esto es evidente. □

1.9. Construcciones

{p:db} **1.9.1.** Si $M \in {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$, una forma bilineal $\varphi : M \times M \to \mathbb{C}$ es $\mathfrak{g}$-*invariante* si

$$\varphi(x \cdot m, n) + \varphi(m, x \cdot n) = 0$$

siempre que $x \in \mathfrak{g}$ y m, $n \in M$. Es claro que las formas bilineales $\mathfrak{g}$-invariantes forman un subespacio vectorial $\mathsf{Bil}_{\mathfrak{g}}(M)$ del espacio vectorial $\mathsf{Bil}(M)$ de todas las formas bilineales sobre M. Más aún, si $\alpha : \mathsf{Bil}(M) \to \mathsf{hom}(M \otimes M, \mathbb{C})$ es el isomorfismo usual tal que $\alpha(\varphi)(m \otimes n) = \varphi(m,n)$ para cada $\varphi \in \mathsf{Bil}(M)$ y cada m, $n \in M$, entonces $\alpha(\mathsf{Bil}_{\mathfrak{g}}(M)) = \mathsf{hom}_{\mathfrak{g}}(M \otimes M, \mathbb{C})$ y, en particular, si notamos también α a la restricción de α a $\mathsf{Bil}_{\mathfrak{g}}(M)$, conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Bil}_{\mathfrak{g}}(M) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathsf{Bil}(M) \arrow[d, "\alpha"] \\
\mathsf{hom}_{\mathfrak{g}}(M \otimes M, \mathbb{C}) \arrow[r, hook] & \mathsf{hom}(M \otimes M, \mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

2. Álgebras de Lie abelianas y carácteres

2.1. Módulos

2.1.1. Fijemos una $\mathbb{C}$-álgebra de Lie abeliana $\mathfrak{h}$ de dimensión finita. Sea $\mathfrak{h}^*$ el espacio vectorial dual a $\mathfrak{h}$.

{p:h:simples:def} **2.1.2. Lema.** *Si $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, existe un $\mathfrak{h}$-módulo $\mathbb{C}_\lambda$ de dimensión 1 tal que para todo $h \in \mathfrak{h}$ y todo $v \in \mathbb{C}_\lambda$ es $h \cdot v = \lambda(h)v$.*

Demostración. Esto es inmediato. □

{p:h:simples:list} **2.1.3. Proposición.** *El conjunto $\{\mathbb{C}_\lambda : \lambda \in \mathfrak{h}^*\}$ es un sistema completo de representantes de las clases de isomorfismo de objetos simples de ${}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}$.*

Demostración. Sea $M \in {}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}$ un módulo simple y sea $\rho_M : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(M)$ la representación correspondiente. Si $h \in \mathfrak{h}$, es $\rho_M(h) \in \operatorname{End}_{\mathfrak{h}}(M)$ ya que $\mathfrak{h}$ es abeliana y entonces el lema de Schur implica que existe exactamente un escalar $\lambda(h) \in k$ tal que $\rho_M(h) = \lambda(h)\,\mathrm{id}_M$. Si $h' \in \mathfrak{h}$ es otro elemento y $a \in k$, es claro que

$$\begin{aligned}\rho_M(h + ah') &= \rho_M(h) + a\rho_M(h') = \lambda(h)\,\mathrm{id}_M + a\lambda(h')\,\mathrm{id}_M \\ &= \big(\lambda(h) + a\lambda(h')\big)\mathrm{id}_M,\end{aligned}$$

así que $\lambda(h + ah') = \lambda(h) + a\lambda(h')$. Esto implica que $\lambda : \mathfrak{h} \to k$ es lineal, esto es, que $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Notemos que es $h \cdot v = \lambda(h)v$ cualesquiera sean $h \in \mathfrak{h}$ y $v \in M$. En particular, si $v \in M \setminus 0$, es claro que el subespacio $\langle v \rangle$ generado por M es un submódulo de M. Como M es simple, debe ser entonces $M = \langle v \rangle$. Es fácil, a esta altura, verificar que la aplicación $x \in \mathbb{C}_\lambda \mapsto xv \in M$ es un isomofismo de $\mathfrak{h}$-módulos. Esto prueba que $\{\mathbb{C}_\lambda : \lambda \in \mathfrak{h}^*\}$ contiene representantes de todas las clases de isomofismo de $\mathfrak{h}$-módulos simples.

La verificación de que si λ, $\mu \in \mathfrak{h}^*$ son tales que $\mathbb{C}_\lambda \cong \mathbb{C}_\mu$ entonces $\lambda = \mu$ sigue de un cálculo directo. □

{p:h:simples:ot} **2.1.4. Proposición.** *Si λ, $\mu \in \mathfrak{h}^*$, hay un isomorfismo $\mathbb{C}_\lambda \otimes \mathbb{C}_\mu \cong \mathbb{C}_{\lambda+\mu}$.*

Demostración. En efecto, la aplicación

$$x \otimes y \in \mathbb{C}_\lambda \otimes \mathbb{C}_\mu \mapsto xy \in \mathbb{C}_{\lambda+\mu}$$

es un isomorfismo de $\mathfrak{h}$-módulos. □

{p:h:series} **2.1.5. Proposición.** *Todo objeto de ${}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}$ posee una serie de composición.*

Demostración. Sea $M \in {}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}$. Para ver que M posee una serie de composición, hacemos inducción sobre $\dim_{\mathbb{C}} M$. Si $\dim_{\mathbb{C}} M = 0$ o $\dim_{\mathbb{C}} M = 1$, esto es evidente, ya que en ese caso M es o nulo o simple. Supongamos entonces que $\dim_{\mathbb{C}} M \geq 2$. Entonces M no es simple, ya que de acuerdo a **2.1.3** todo objeto simple tiene dimensión 1. Entonces existe un submodulo $M' \subset M$ no nulo y propio. Como $\dim_{\mathbb{C}} M' < \dim_{\mathbb{C}} M$ y $\dim_{\mathbb{C}} M/M' < \dim_{\mathbb{C}} M$, la hipótesis inducativa implica que tanto M' como M/M' poseen series de composición. De la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M/M' \longrightarrow 0$$

de ${}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}$, entonces, y de **A.1.3**, concluimos que M posee una serie de composición. Esto prueba la proposición. □

2.2. Carácteres en ${}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}$

2.2.1. Sea $\mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]$ la $\mathbb{Z}$-álgebra de grupo correspondiente al subgrupo aditivo subyacente al espacio vectorial $\mathfrak{h}^*$. Convengamos en notar q^λ al elemento de $\mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]$ correspondiente a $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. De esta manera, el conjunto $\{q^\lambda : \lambda \in \mathfrak{h}^*\}$ es una base de $\mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]$ en tanto grupo abeliano y el producto es tal que

$$q^\lambda \cdot q^\mu = q^{\lambda+\mu}$$

para cada elección de λ, $\mu \in \mathfrak{h}^*$; en particular, el elemento identidad de $\mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]$ es $1_{\mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]} = q^0$.

{p:h:chi} **2.2.2. Proposición.** *Sea ${}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}$ la subcategoría plena de ${}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}$ generada por los objetos semisimples. Entonces hay un isomorfismo de anillos $\chi : K({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}) \to \mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]$ tal que*

$$\chi([\![\mathbb{C}_\lambda]\!]) = q^\lambda$$

para cada $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

Desde ahora consideraremos a la aplicación χ como una identificación.

Demostración. De acuerdo a **A.4.3.4** y a **2.1.3**, hay un isomorfismo de grupos abelianos $\chi : K({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}) \to \mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]$ tal que $\chi([\![\mathbb{C}_\lambda]\!]) = q^\lambda$ para cada $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. De acuerdo, ahora, a **A.4.2.4** y a **2.1.4**, este morfismo es un morfismo de anillos. □

2.3. Construcciones en ${}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}$

2.3.1. Sea $K({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}})[\![T]\!]$ el anillo de series formales en la variable T con coeficientes en $K({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}})$ y sea $K({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}})[\![T]\!]^\times$ el grupo multiplicativo de los elementos inversibles de $K({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}})[\![T]\!]$.

2.3.2. Un *endofunctor multiplicativo* en ${}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}$ es una sucesión $F = ((F^d, \mu^d))_{d\geq 0}$ de pares ordenados tales que, para cada $d \geq 0$, $F^d : {}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}} \to {}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}$ es un functor y

$$\mu^d_{M',M''} : F^d(M' \oplus M'') \to \bigoplus_{d'+d''=d} F^{d'}M' \otimes F^{d''}M''$$

es un isomorfismo natural en M' y en M''. Si además F^0 es el functor constante que vale $\mathbb{C}$, el $\mathfrak{h}$-módulo trivial, decímos que F es *unitario*.

{p:fm} **2.3.3. Proposición.** *Sea $F = ((F^d, \mu^d))_{d\geq 0}$ un functor multiplicativo unitario. Entonces existe exactamente un morfismo de grupos abelianos*

$$\psi_F : K({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}) \to K({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}})[\![T]\!]^\times$$

del grupo aditivo subyacente a $K({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}})$ al grupo multiplicativo $K({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}})[\![T]\!]^\times$ tal que si $M \in {}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}$, es

{eq:cond:fm}
$$\psi_F([\![M]\!]) = \sum_{d\geq 0} [\![F^d M]\!]\, T^d. \tag{4}$$

Cuando queremos explicitar la variable T escribimos también $\psi_F([\![M]\!], T)$ en lugar de $\psi_F([\![M]\!])$.

Demostración. Sea $\bar\psi_F : L({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}) \to K({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}})[\![T]\!]^\times$ el morfismo de grupos tal que para cada $M \in {}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}$ es $\bar\psi_F([M]) = \sum_{d\geq 0}[\![F^d M]\!]T^d$. Si

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta en ${}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}$, entonces $M \cong M' \oplus M''$ y

{eq:lambdas}
$$F^d M \cong F^d(M' \oplus M'') \cong \bigoplus_{d'+d''=d} F^{d'} M' \otimes F^{d''} M''. \tag{5}$$

Ahora bien, es

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_F([M']) \cdot \bar{\psi}_F([M']) &= \Big(\sum_{d' \geq 0} [\![F^{d'} M']\!]\, T^{d'} \Big) \Big(\sum_{d'' \geq 0} [\![F^{d''} M'']\!]\, T^{d''} \Big) \\ &= \sum_{d', d'' \geq 0} [\![F^{d'} M']\!]\, [\![F^{d''} M'']\!]\, T^{d'+d''} \\ &= \sum_{d \geq 0} \Big(\sum_{d'+d''=d} [\![F^{d'} M']\!] [\![F^{d''} M'']\!] \Big) T^d \end{aligned}$$

y, de acuerdo a (5), esto es

$$\begin{aligned} &= \sum_{d \geq 0} [\![F^d M]\!]\, T^d \\ &= \bar{\psi}_F([M]). \end{aligned}$$

Esto nos dice que $\bar{\psi}_F([M] - [M'] - [M'']) = 1$ y, entonces, que $\bar{\psi}_F(R({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}})) = 1$. En particular, $\bar{\psi}_F$ induce un homomorfismo $\psi_F : K({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}) \to K({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}})[\![T]\!]^\times$ tal que si $M \in {}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}$ es $\psi_F([\![M]\!]) = \sum_{d \geq 0} [\![F^d M]\!]\, T^d$.

Hemos probado, entonces, la afirmación relativa a la existencia que aparece en el enunciado. La unicidad, por otro lado, es consecuencia inmediata del hecho de que $\{[\![\mathbb{C}_\lambda]\!] : \lambda \in \mathfrak{h}^*\}$ es una base de $K({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}})$ y de que la imagen de $[\![\mathbb{C}_\lambda]\!]$ está fijada por la condición (4). □

{p:ls:ss}
2.3.4. Lema. *Si $M \in {}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}$ y $d \geq 0$, entonces también $\Lambda^d M$, $S^d M \in {}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}$. Más aún, los functores Λ^d, $S^d : {}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod} \to {}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}$ se restringen a ${}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}$ para dar functores Λ^d, $S^d : {}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}} \to {}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}$ y, también por restricción de los isomorfismos naturales involucrados, obtenemos así endofunctores multiplicativos unitarios $\Lambda = ((\Lambda^d, \mu^d_\Lambda))_{d \geq 0}$ y $S = ((S^d, \mu^d_S))_{d \geq 0}$ en ${}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}$.*

Demostración. La primera afirmación es consecuencia de que existen en ${}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}$ epimorfismos $M^{\otimes d} \twoheadrightarrow \Lambda^d M$ y $M^{\otimes d} \twoheadrightarrow S^d M$ y de que la categoría ${}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}$ es cerrada bajo imágenes epimórficas. La segunda es inmediata. □

{p:h:ls}
2.3.5. Proposición. *Existen morfismos de grupos*

$$\psi_\Lambda,\ \psi_S : K({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}) \to K({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}})[\![T]\!]^\times$$

tales que para cada $M \in {}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}$ es

$$\psi_\Lambda([\![M]\!]) = \sum_{d \geq 0} [\![\Lambda^d M]\!]\, T^d$$

y

$$\psi_S([\![M]\!]) = \sum_{d \geq 0} [\![S^d M]\!]\, T^d.$$

Además, cualquiera sea $M \in {}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}$ se tiene que

{eq:koszul}
$$\psi_\Lambda([\![M]\!], T) \cdot \psi_S([\![M]\!], -T) = 1. \tag{6}$$

Demostración. La primera parte sigue de 2.3.3 y de 2.3.4. Para ver la segunda, y como tanto $\psi_\Lambda([\![M]\!], T)$ como $\psi_S([\![M]\!], -T)$ dependen multiplicativamente de M, basta mostrar que para cada $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ es

$$\psi_\Lambda([\![\mathbb{C}_\lambda]\!], T) \cdot \psi_S([\![\mathbb{C}_\lambda]\!], -T) = 1.$$

Como $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_\lambda = 1$, es claro que

$$\Lambda^d \mathbb{C}_\lambda = \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{si } d = 0; \\ \mathbb{C}_\lambda, & \text{si } d = 1; \text{ y} \\ 0, & \text{si } d \geq 2, \end{cases}$$

así que

{eq:koszul:1} $$\psi_\Lambda([\![\mathbb{C}_\lambda]\!], T) = 1 + [\![\mathbb{C}_\lambda]\!]\, T. \tag{7}$$

Por otro lado es fácil verificar que para cada $d \geq 0$ es $S^d \mathbb{C}_\lambda \cong \mathbb{C}_{d\lambda}$, así que $[\![\S^d \mathbb{C}_\lambda]\!] = [\![\mathbb{C}_{d\lambda}]\!] = [\![\mathbb{C}_\lambda]\!]^d$ y entonces

{eq:koszul:2} $$\varphi_S([\![\mathbb{C}_\lambda]\!], -T) = \sum_{d\geq 0} [\![S^d \mathbb{C}_\lambda]\!]\, (-T)^d = \sum_{d \geq 0} [\![\mathbb{C}_\lambda]\!]^d\, (-T)^d = \frac{1}{1 + [\![\mathbb{C}_\lambda]\!]\, T}. \tag{8}$$

La relación (6) es consecuencia, entonces, de (7) y de (8). □

2.4. Subcategorías

2.4.1. Fijemos un subgrupo aditivo $\Gamma \subset \mathfrak{h}$, notemos

$$\mathfrak{h}^*_\Gamma = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* : \lambda(\Gamma) \subseteq \mathbb{Z}\}.$$

Se trata, claramente, de un subgrupo de $\mathfrak{h}^*$.

2.4.2. Sea ${}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}_\Gamma \subset {}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}$ la subcategoría aditiva plena y saturada por isomorfismos generada por el conjunto $\{\mathbb{C}_\lambda : \lambda \in \mathfrak{h}^*_\Gamma\}$.

{p:h:kG} **2.4.3. Proposición.** *La categoría ${}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}_\Gamma$ es una subcategoría abeliana de ${}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}$. Se trata de una categoría semisimple y $\{\mathbb{C}_\lambda : \lambda \in \mathfrak{h}^*_\Gamma\}$ es un sistema completo de representantes de las clases de isomorfismo de objetos simples de ${}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}_\Gamma$. En particular, $\{[\![\mathbb{C}_\lambda]\!] : \lambda \in \mathfrak{h}^*_\Gamma\}$ es una base del grupo abeliano $K({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}_\Gamma)$.*

Demostración. To be done □

2.4.4. Proposición. *El $\mathfrak{h}$-módulo trivial $\mathbb{C}$ es un objeto de ${}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}_\Gamma$ y el producto tensorial $(-) \otimes (-) : {}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}} \times {}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}} \to {}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}$ se restringe a la subcategoría ${}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}_\Gamma$ para dar un functor $(-) \otimes (-) : {}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}_\Gamma \times {}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}_\Gamma \to {}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}_\Gamma$. Más aún, la categoría tensorial $({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}, \otimes, \mathbb{C}, \alpha, \lambda, \rho)$ da, por restricción, una categoría tensorial $({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}_\Gamma, \otimes, \mathbb{C}, \alpha, \lambda, \rho)$ tal que el functor de inclusión $F : {}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}_\Gamma \to {}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}$ es un functor tensorial estricto.*

Demostración. To be done □

2.4.5. Sea $\mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*_\Gamma]$ la $\mathbb{Z}$-álgebra de grupo de $\mathfrak{h}^*_\Gamma$ y sea $\iota : \mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*_\Gamma] \to \mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]$ el morfismo de anillos inducido por la inclusión $\mathfrak{h}^*_\Gamma \hookrightarrow \mathfrak{h}^*$.

2.4.6. Proposición. *Sea $F : {}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}_{\Gamma} \to {}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}$ el functor de inclusión. Entonces existe un isomorfismo de anillos $\chi : K({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}_{\Gamma}) \to \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*_{\Gamma}]$ tal que conmuta el diagrama*

$$\begin{tikzcd} K({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}_{\Gamma}) \arrow[r, "K(F)"] \arrow[d, "\chi"'] & K({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}_{\Gamma}) \arrow[d, "\chi"] \\ \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*_{\Gamma}] \arrow[r, "\iota"] & \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*] \end{tikzcd}$$

en el que el morfismo vertical de la derecha es el isomorfismo de 2.2.2.

Demostración. To be done □

2.4.7. Proposición. *Si $M \in {}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}_{\Gamma}$ y $d \geq 0$, entonces $\Lambda^d M$ y $S^d M$ son objetos de ${}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}_{\Gamma}$. Existen morfismos de grupos ψ_{Λ}, $\psi_S : K({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}_{\Gamma}) \to K({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}_{\Gamma})[\![T]\!]^{\times}$ que hacen conmutar los diagramas*

$$\begin{tikzcd} K({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}_{\Gamma}) \arrow[r, "K(F)"] \arrow[d, "\psi_{\Lambda}"] & K({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}) \arrow[d, "\psi_{\Lambda}"] \\ K({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}_{\Gamma})[\![T]\!]^{\times} \arrow[r] & K({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}})[\![T]\!]^{\times} \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} K({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}_{\Gamma}) \arrow[r, "K(F)"] \arrow[d, "\psi_{S}"] & K({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}) \arrow[d, "\psi_{S}"] \\ K({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}_{\Gamma})[\![T]\!]^{\times} \arrow[r] & K({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}})[\![T]\!]^{\times} \end{tikzcd}$$

en los que $F : {}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}_{\Gamma} \to {}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{s}s$ es el functor de inclusión, las flechas verticales de laderecha son los morfismos de 2.3.5 *y el morfismo $K({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}_{\Gamma})[\![T]\!]^{\times} \to K({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}})[\![T]\!]^{\times}$ es el inducido de manera evidente por $K(F)$.*

Demostración. To be done □

3. $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

3.1. Espacios de peso

3.1.1. Fijemos $k = \mathbb{C}$ y sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

{p:sl2:def} **3.1.2.** Ponemos

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es inmediato que $\{e, h, f\}$ es una base para $\mathfrak{g}$. Además, un cálculo directo muestra que

{eq:sl2:rels}
$$[h, e] = 2e, \qquad [e, f] = h, \qquad [h, f] = -2f. \tag{9}$$

3.1.3. Si $M \in {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y $i \geq 1$, escribamos

$$M_i^\lambda = \mathsf{ker}(h - \lambda)^i$$

y

$$M^\lambda = \bigcup_{i \geq 0} M_i^\lambda.$$

Es claro que $M_i^\lambda \subseteq M_{i+1}^\lambda$ para cada $i \geq 1$, así que M^λ es un subespacio vectorial de M. Se trata, por supuesto, del subespacio de los autovectores generalizados de h en M correspondientes a λ. En particular, sabemos que

{eq:sl2:desc-M}
$$M = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} M^\lambda. \tag{10}$$

3.1.4. Como M tiene dimensión finita, debe ser $M_\lambda = 0$ para casi todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Llamamos al conjunto finito

$$\mathsf{supp}\, M = \{\lambda \in \mathbb{C} : M^\lambda \neq 0\}$$

el *soporte* de M.

3.1.5. Por otro lado, como la suma (10) es directa, cualquiera sea $i \geq 1$ la familia $\{M_i^\lambda : \lambda \in \mathbb{C}\}$ de subespacios de M es linealmente independiente. Podemos entonces considerar el subespacio

$$M_i = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} M_i^\lambda \subseteq M.$$

{p:sl2:desc-M-sub} **3.1.6. Lema.** *Si $i \geq 1$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces*

$$e \cdot M_i^\lambda \subseteq M_i^{\lambda+2}, \qquad f \cdot M_i^\lambda \subseteq M_i^{\lambda-2}, \qquad h \cdot M_i^\lambda \subseteq M_i^\lambda.$$

Demostración. Es fácil verificar que para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ y cada $i \geq 1$ es

$$(h - \lambda)^i e = e(h - (\lambda - 2))^i,$$
$$(h - \lambda)^i h = h(h - \lambda)^i,$$
$$(h - \lambda)^i f = f(h - (\lambda + 2))^i.$$

Las inclusiones del enunciado son consecuencia inmediata de esto. Por ejemplo, si $v \in M_i^\lambda$ entonces $(h - \lambda)^i \cdot v = 0$ y, en consecuencia,

$$(h - (\lambda + 2))^i e \cdot v = e(h - \lambda)^i \cdot v = 0.$$

Esto nos dice que $e \cdot v \in M^{\lambda+2}$. □

{p:sl2:comp} **3.1.7. Corolario.** *Si $i \geq 1$, entonces M_i es un submódulo de M, de manera que obtenemos una cadena creciente de submódulos*

$$0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_i \subseteq M_{i+1} \subseteq \cdots \subseteq M.$$

Demostración. Esto es consecuencia inmediata de 3.1.6. □

3.1.8. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ y $v \in M_1^\lambda$, decimos que v es un *vector de peso* en M y que λ es su *peso*. Si $M = M_1$, decimos que M es un $\mathfrak{g}$-*módulo de peso*. Notemos que en ese caso es $M^\lambda = M_1^\lambda$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

{p:sl2:pesos} **3.1.9. Proposición.** *Si M es un $\mathfrak{g}$-módulo de peso, todo $\mathfrak{g}$-submódulo de M y todo cociente de M es un $\mathfrak{g}$-módulo de peso.*

Demostración. Sea $N \subset M$ un $\mathfrak{g}$-módulo y sea $n \in N$. Como $M = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} M_1^\lambda$, existe $I \subset \mathbb{C}$ finito y, para cada $\lambda \in I$, un elemento $m^\lambda \in M_1^\lambda$ de manera que $n = \sum_{\lambda \in I} m^\lambda$. Pero entonces, si $0 \leq i \leq |I|$, es $\sum_{\lambda \in I} \lambda^i m^\lambda = h^i \cdot n \in N$ y, recordando que la matriz de Vandermonde construida a partir de los elementos de I es inversible, vemos que $m^\lambda \in N$ para cada $\lambda \in I$.

Esto muestra que $N = \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} N \cap M_1^\lambda$ y, por supuesto, esta suma es directa. Como $N_1^\lambda = N \cap M_1^\lambda$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, concluimos que $N = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} N_1^\lambda$, esto es, que N es un $\mathfrak{g}$-módulo de peso.

Sea ahora $f : M \to P$ un epimorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos. Como $f(h \cdot m) = h \cdot f(m)$ siempre que $m \in M$, es claro que $f(M_1^\lambda) \subset P_1^\lambda$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$P = f(M) = f\Big(\bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} M_1^\lambda\Big) \subseteq \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} f(M_1^\lambda) \subseteq \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} P_1^\lambda.$$

Esto implica que P es un $\mathfrak{g}$-módulo de peso. □

3.1.10. Corolario. *La subcategoría plena ${}^0_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$ de ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$ determinada por los módulos de peso es una subcategoría abeliana.*

Demostración. Es claro que se trata de una subcategoría aditiva. En vista de la proposición el núcleo y el conúcleo de un morfismo de ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$ entre objetos de ${}^0_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$ son objetos de ${}^0_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$. Usando esto, es fácil verificar que ${}^0_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$ es una categoría abeliana y que la inclusión ${}^0_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod} \hookrightarrow {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$ es exacta. □

{p:sl2:1st-reduction} **3.1.11. Proposición.** *Sea $M \in {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$. Entonces para cada $i \geq 1$ el cociente M_i/M_{i-1} es un $\mathfrak{g}$-módulo de peso. En particular, M es extensión iterada de $\mathfrak{g}$-módulos de peso de dimensión finita.*

Demostración. La primera afirmación es inmediata, mientras que la segunda sigue de la primera y de una inducción sobre la longitud de la cadena construida en 3.1.7, ya que tenemos sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow M_{i-1} \longrightarrow M_i \longrightarrow M_i/M_{i-1} \longrightarrow 0$$

para cada $i \geq 1$. □

3.1.12. Consideremos el orden $\leq$ en $\mathbb{C}$ tal que

$$\lambda \leq \lambda' \iff \lambda' - \lambda \in 2\mathbb{N}_0.$$

3.1.13. Si $M \in {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$ es un $\mathfrak{g}$-módulo de peso, decimos que es un $\mathfrak{g}$-*módulo de peso máximo* si el conjunto $\operatorname{supp} M$ tiene un elemento máximo λ y si existe un vector $v \in M_\lambda$ que v genera a M. En ese caso, llamamos a v un *vector de peso máximo* de M.

{p:sl2:2nd-reduction} **3.1.14. Proposición.** *Todo módulo de peso de dimensión finita es extensión interada de módulos de peso máximo.*

Demostración. Sea $M \in {}^{0}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$ un módulo de peso de dimensión finita no nulo. Como $\operatorname{supp} M$ es finito y no vacío, existe un elemento $\lambda \in \operatorname{supp} M$ maximal. En particular, existe $v \in M_\lambda \setminus 0$. Sea $N = \langle v \rangle$ el submódulo de M generado por v. Entonces $\operatorname{supp} N \subseteq \lambda - 2\mathbb{N}_0$ y claramente $N_\lambda \neq 0$. Esto nos dice que $\lambda = \max \operatorname{supp} N$. Vemos así que N es un módulo de peso máximo. Además, tenemos una extensión

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

y, por supuesto, M/N tiene dimensión estrictamente más pequeña que la de M. La proposición sigue, entonces, por inducción. □

3.2. La estructura de los módulos de peso máximo

3.2.1. Fijemos un $\mathfrak{g}$-módulo de peso máximo $M \in {}^{0}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$, sea $\lambda = \max \operatorname{supp} M$ su peso máximo y sea, finalemente, $v_\lambda \in M^\lambda$ un vector de peso máximo.

{p:sl2:weight:highest} **3.2.2.** Como $e \cdot v_\lambda \in M^{\lambda+2}$ y λ es el peso máximo de M, $e \cdot v_\lambda = 0$.

3.2.3. Como $v_\lambda \in M^\lambda$,

$$\lambda v_\lambda = h \cdot v_\lambda = [e, f] \cdot v_\lambda = ef \cdot v_\lambda - fe \cdot v_\lambda.$$

Como $e \cdot v_\lambda = 0$, vemos que

{p:sl2:weight:ef}
$$ef \cdot v_\lambda = \lambda v_\lambda. \tag{11}$$

3.2.4. Como $f \cdot v_\lambda \in M^{\lambda-2}$, es

$$(\lambda - 2) f \cdot v_\lambda = hf \cdot v_\lambda = [e, f] f \cdot v_\lambda = ef^2 \cdot v_\lambda - fef \cdot v_\lambda$$

y, usando (11), vemos que

$$(\lambda - 2) f \cdot v_\lambda = ef^2 \cdot v_\lambda + \lambda f \cdot v_\lambda,$$

es decir, que

{p:sl2:weight:eff}
$$ef^2 \cdot v_\lambda = 2(\lambda - 1) f \cdot v_\lambda. \tag{12}$$

3.2.5. Más generalmente,

{p:sl2:weight:general} **Lema.** *Para cada $i \geq 0$, se tiene que $ef^{i+1} \cdot v_\lambda = (i+1)(\lambda - i) f^i \cdot v_\lambda$.*

Demostración. Cuando $i = 0$ o $i = 1$, esto es (11) y (12), respectivamente. Supongamos que $i \geq 0$ y que la igualdad del lema vale. Entonces $f^{i+1} \cdot v_\lambda \in M^{\lambda - 2(i+1)}$, así que

$$\begin{aligned}(\lambda - 2(i+1)) f^{i+1} \cdot v_\lambda &= hf^{i+1} \cdot v_\lambda = [e, f] f^{i+1} \cdot v_\lambda \\ &= ef^{i+2} \cdot v_\lambda - fef^{i+1} \cdot v_\lambda,\end{aligned}$$

que, usando la hipótesis, queda

$$= ef^{i+2} \cdot v_\lambda - (i+1)(\lambda - i) f^{i+1} \cdot v_\lambda.$$

Reordenando esto, vemos que

$$ef^{i+2} \cdot v_\lambda = (i+2)(\lambda - i - 1) f^{i+1} \cdot v_\lambda,$$

así que el lema sigue por inducción. □

3.2.6. Decimos que $v \in M$ es un *vector singular* si $e \cdot v = 0$.

{p:sl2:weight} **3.2.7. Proposición.** *Sea M un $\mathfrak{g}$-módulo de peso máximo λ y sea $v_\lambda \in M^\lambda$ un vector de peso máximo. Sea*

$$r = \operatorname{min}\{i \in \mathbb{N}_0 : f^i \cdot v_\lambda \neq 0\}.$$

Entonces $\{f^i \cdot v_\lambda : 0 \leq i \leq r\}$ es una base de M y, en particular, $\operatorname{dim}_{\mathbb{C}} M = r+1$. Se tiene además que $\lambda = r$, que para cada $i \in \{0, \dots, r\}$ es $M^{\lambda-2i} = \mathbb{C}f^i \cdot v_\lambda$, y que

$$\operatorname{supp} M = \{r, r-2, r-4, \dots, -r+4, -r+2, -r\}.$$

El subespacio de M de vectores singulares tiene dimensión 1 y está generado por v_λ. Finalmente, M es un $\mathfrak{g}$-módulo simple.

Demostración. En vista de 3.2.5, el subespacio vectorial $\langle f^i \cdot v_\lambda : 0 \leq i \leq r\rangle$ es un $\mathfrak{g}$-submódulo. Como contiene a v_λ y v_λ genera a M, este submódulo debe coincidir con M. El conjunto $\mathcal{B} = \{f^i \cdot v_\lambda : 0 \leq i \leq r\}$ es linealmente independiente, pues sus elementos son autovectores de h correspondientes a autovalores distintos dos a dos, así que se trata de una base de M. Por supuesto, esto nos dice que $\operatorname{dim}_{\mathbb{C}} M = r+1$. De acuerdo a 3.2.5 y a la elección de r, es

$$0 = ef^{r+1} \cdot v_\lambda = (r+1)(\lambda - r)f^r \cdot v_\lambda,$$

así que debe ser $\lambda = r$. La descripción de los espacios de peso $M^{\lambda-2i}$ y de $\operatorname{supp} M$ del enunciado son ahora evidentes. Además el lema 3.2.5 nos dice que la matriz de la acción de e sobre M en la base $\mathcal{B}$ es

$$\begin{pmatrix}
0 & r & 0 & 0 & & & & & \\
0 & 0 & 2(r-1) & 0 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 3(r-2) & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
 & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & 0 & (r-2)3 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & (r-1)2 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & r \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

y es claro que su núcleo tiene dimensión 1. Ese núcleo es precisamente el espacio de vectores singulares.

Para terminar, supongamos que M no es simple. En ese caso, es consecuencia de 3.1.14 que M contiene un submódulo propio y no trivial N que es un módulo de peso máximo—en particular, $v_\lambda \notin N$. En vista de 3.2.2, entonces, existe $v \in N \setminus 0$ tal que $e \cdot v = 0$ y vemos que M contiene dos vectores singulares linealmente independientes. Esto es absurdo. □

{p:sl2:Vr} **3.2.8. Proposición.** *Si $r \in \mathbb{N}_0$ existe, a menos de isomorfismo, un único $\mathfrak{g}$-módulo V_r de peso máximo de dimensión $r+1$ y este módulo es simple y r es su peso máximo.*

Demostración. Sea $r \in \mathbb{N}_0$ y sea V_r el espacio vectorial con base $\{v_i : 0 \leq i \leq r\}$. Consideremos la acción de $\mathfrak{g}$ sobre V_r tal que

$$\begin{aligned}
&e \cdot v_0 = 0; \\
&e \cdot v_i = i(r-i+1)v_{i-1}, && \text{si } 0 < i \leq r; \\
&h \cdot v_i = (r-2i)v_i, && \text{si } 0 \leq i \leq r; \\
&f \cdot v_i = v_{i+1}, && \text{si } 0 \leq i < r; \\
&f \cdot v_r = 0.
\end{aligned}$$

Es fácil verificar que estas relaciones hacen de V_r un $\mathfrak{g}$-módulo.

Claramente V_r es un $\mathfrak{g}$-módulo de peso máximo r. Si M es otro $\mathfrak{g}$-módulo de peso máximo r y su u_r es un vector de peso r en M, entonces existe exactamente una transformación lineal $\varphi : V_r \to M$ tal que $\varphi(v_i) = f^i \cdot u_r$ si $0 \leq i \leq r$. El lema 3.2.5 y la proposición 3.2.7 permiten mostrar fácilmente que φ es un isomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos. □

{p:sl2:unique-simple} **3.2.9. Proposición.** *Todo $\mathfrak{g}$-módulo simple de dimensión finita es un módulo de peso máximo. En particular, todo $\mathfrak{g}$-módulo de dimensión 1 es trivial.*

Demostración. Como e actúa nilpotentemente sobre M, existe $v \in M \setminus 0$ tal que $e \cdot v = 0$. Sea $V = \langle h^i \cdot v : i \in \mathbb{N}_0 \rangle$. Si $i \in \mathbb{N}_0$, es $eh^i \cdot v = (h-2)^i e \cdot v = 0$, así que $e \cdot V = 0$. Por otro lado, es obvio que $h \cdot V \subset V$, de manera que h se restringe a una transformación lineal $V \to V$. En particular, h posee un autovector en V: existe $\lambda \in \mathbb{C}$ y $w \in V \setminus 0$ tal que $h \cdot w = \lambda w$.

Como M es simple, el $\mathfrak{g}$-submódulo de M generado por w coincide con M. En particular, como w es un vector singular, tenemos que $\operatorname{supp} M \subseteq \lambda - 2\mathbb{N}_0$ y vemos que λ es el máximo de $\operatorname{supp} M$. Así, w es un vector de peso máximo en M que genera a M. □

3.3. Extensiones

{p:sl2:perfection} **3.3.1. Proposición.** *Es $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.*

Demostración. Esto es inmediato de las relaciones (9) de 3.1.2. □

{p:sl2:ext:trivial} **3.3.2. Proposición.** *Toda extensión*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

en ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$ en la que N y P son $\mathfrak{g}$-módulos triviales se parte y, en particular, el $\mathfrak{g}$-módulo M también es trivial.

Demostración. Consideremos una extensión como la del enunciado y sean $m \in M$ y $x, y \in \mathfrak{g}$. Es $g(x \cdot m) = x \cdot g(m) = 0$ porque P es trivial, así que existe $n \in N$ tal que $x \cdot m = f(n)$. Pero entonces $y \cdot (x \cdot m) = y \cdot f(n) = f(y \cdot n) = 0$ porque N es trivial. De forma simétrica, $x \cdot (y \cdot m) = 0$ y concluimos que

$$[x, y] \cdot m = x \cdot (y \cdot m) - y \cdot (x \cdot m) = 0.$$

La arbitrariedad de x e y y la linealidad de la acción de $\mathfrak{g}$ sobre M implican, entonces, que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cdot m = 0$. Como $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ de acuerdo a 3.3.1, esto a su vez implica que m es $\mathfrak{g}$-invariante. De la arbitrariedad de m, entonces, concluimos que M es trivial. Si $\sigma : P \to M$ es cualquier transformación $\mathbb{C}$-lineal tal que $g \circ \sigma = \mathrm{id}_P$, es claro ahora que σ es un morfismo de $\mathfrak{g}$-módulos y, entonces, que la sucesión exacta se parte. □

{p:sl2:ext:filt} **3.3.3. Lema.** *Sea C una categoría abeliana, sea*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta en C, y sea $N \in \mathsf{C}$ un objeto tal que toda extensión de N por M' o por M'' se parte. Entonces toda extensión de N por M se parte.

Demostración. Consideremos una extensión

{eq:sl2:ext:filt:0}
$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0 \tag{13}$$

Tenemos que mostrar que esto se parte.

Consideremos el diagrama

{eq:sl2:ext:filt:1}

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M'' \arrow[r, "f''"'] & E'' \arrow[r, "g''"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{14}$$

construido de manera que el cuadrado izquierdo sea un push-out, es decir, de manera que la sucesión

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\begin{pmatrix} j \\ -f \end{pmatrix}} M'' \oplus E' \xrightarrow{\begin{pmatrix} f'' \\ q \end{pmatrix}} E'' \longrightarrow 0$$

sea exacta. Como la extensión de la segunda fila de (14) se parte por hipótesis, existen una retracción $r : E'' \to M''$ de f'' y una sección $s : N \to E''$ de g'' tales que $f'' \circ g'' = 0$.

Sea $p : E' \to E$ un núcleo para $r \circ q : E \to M''$. Como

$$r \circ q \circ f \circ i = r \circ f'' \circ j \circ i = 0,$$

existe exactamente un morfismo $f' : M' \to E'$ tal que $f \circ i = p \circ f'$. Consideremos $g' = g \circ p : E' \to N$. Entonces conmuta el diagrama

{eq:sl2:ext:filt:1.5}

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "i"] & E' \arrow[d, "p"] & & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] & E \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{15}$$

Afirmamos que la sucesión

{eq:sl2:ext:filt:2}

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\begin{pmatrix} i \\ -f' \end{pmatrix}} M \oplus E' \xrightarrow{(f\ p)} E \longrightarrow 0 \tag{16}$$

es exacta.

- Como tanto i como f son monomorfismos y $f \circ i = p \circ f'$, f' también es un monomorfismo. Esto implica que (16) es exacta en M'.
- Supongamos que $h : E \to X$ es un morfismo de C tal que $h \circ \begin{pmatrix} f \\ p \end{pmatrix} = 0$, de manera que $h \circ f = 0$ y $h \circ p = 0$. Como g es un conúcleo para f, existe un morfismo $h_1 : N \to X$ tal que $h_1 \circ g = h$. Por otro lado, como $r \circ q$ es un epimorfismo y p es un núcleo para $r \circ q$, $r \circ q$ es un conúcleo para p y entonces, como $h \circ p = 0$, existe $h_2 : M'' \to X$ tal que $h_2 \circ r \circ q = h$. Tenemos que

  $$h_1 \circ g'' \circ q = h_1 \circ g = h = h_2 \circ r \circ q$$

  y, como q es un epimorfismo, vemos que $h_1 \circ g'' = h_2 \circ r$. Pero entonces

  $$h_2 = h_2 \circ r \circ f'' = h_2 \circ g'' \circ f'' = 0$$

  con lo que $h = h_2 \circ r \circ q = 0$. Esto muestra que (16) es exacta en E.

- La conmutatividad de (15) implica que $\begin{pmatrix} f & p \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} i \\ -f' \end{pmatrix} = 0$. Supongamos que $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} : X \to M \oplus E'$ es tal que $\begin{pmatrix} f & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0$, de manera que
$$f \circ h_1 + p \circ h_2 = 0.$$
Es
$$j \circ h_1 = r \circ f'' \circ j \circ h_1 = r \circ q \circ f \circ h_1 = -r \circ q \circ p \circ h_2 = 0,$$
así que existe $\bar{h} : X \to M'$ tal que $h_1 = i \circ \bar{h}$, ya que i es un núcleo para j. Entonces
$$p \circ f' \circ \bar{h} = f \circ i \circ \bar{h} = f \circ h_1 = -p \circ h_2$$
y, como p es un monomorfismo, vemos que $f' \circ \bar{h} = h_2$. En definitiva, vemos que $h = \begin{pmatrix} i \\ -f' \end{pmatrix} \circ \bar{h}$. Esto prueba que (16) es exacta en $M \oplus E'$.

La exactitud de (16) dice que el cuadrado en (15) es un push-out, y entonces podemos completar este último diagrama a un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "i"] & E' \arrow[r] \arrow[d, "p"] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] & E \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

con primera fila exacta. En particular, esta primera fila es una extensión de N por M', que por hipótesis se parte, y existe entonces un morfismo $s : N \to E'$ tal que $g \circ p \circ s = \mathrm{id}_N$. Esto dice que $p \circ s : N \to E$ es una sección para g y concluimos que (13) se parte, como queríamos. □

{p:sl2:ext:filt-iter} **3.3.4. Corolario.** *Sea C una categoría abeliana, sean N, $M \in \mathsf{C}$ dos objetos y sea*

{eq:sl2:ext:filt-iter:chain}
$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M \tag{17}$$

una cadena de subobjetos de M tales, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, toda extensión de N por M_i/M_{i-1} se parte. Entonces toda extensión de N por M se parte.

Demostración. Esto es consecuencia directa del lema, haciendo en la longitud n de la cadena (17). □

3.3.5. El resultado del lema 3.3.3 es una parte de la afirmación sobre la exactitud de la sucesión

$$\mathsf{Ext}^1(N, M') \longrightarrow \mathsf{Ext}^1(N, M) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1(N, M'')$$

donde Ext^1 es el functor que clasifica extensiones en la categoría C.

3.3.6. Proposición. *Si $M \in {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$, sea*

$$\Omega_M : m \in M \mapsto (ef + fe + \tfrac{1}{2}h^2) \cdot m \in M.$$

Esto define una transformación natural $\Omega : \mathrm{id} \to \mathrm{id}$ de functores ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod} \to {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$. Esto es, para cada morfismo $\varphi : M \to N$ en ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$, conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\Omega_M"'] & N \arrow[d, "\Omega_N"] \\
M \arrow[r, "\varphi"] & N
\end{tikzcd}$$

Demostración. Esto sigue de un cálculo directo. □

3.3.7. Si $M \in {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$ es simple, es $\mathsf{End}_{\mathfrak{g}}(M) = \mathbb{C}\mathrm{id}_M$ por el lema de Schur. Existe entonces exactamente un escalar $c_M \in \mathbb{C}$ tal que $\Omega_M = c_M \mathrm{id}_M$. Llamamos a c_M el *carácter central* de M. Es claro, en vista de la proposición, que c_M depende únicamente de la clase de isomorfismo de M.

3.3.8. Proposición. *Si M es un $\mathfrak{g}$-módulo simple de dimensión $r+1$, entonces su carácter central es $c_M = \frac{1}{2}r(r+2)$. En particular, $c_M = 0$ sii M es el $\mathfrak{g}$-módulo simple trivial de dimensión 1.*

Demostración. Basta calcular la acción de Ω_M en un vector $v \in M$ de peso correspondiente al peso máximo r de M. □

{p:sl2:k-proy} **3.3.9. Proposición.** *El $\mathfrak{g}$-módulo trivial k es un objeto proyectivo en ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$.*

Demostración. Tenemos que mostrar que toda sucesión exacta corta en ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$

{eq:sl2:k-proy:ext}
$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} k \longrightarrow 0 \tag{18}$$

se parte. En vista del corolario 3.3.4 y de que N posee una filtración

$$0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \cdots \subseteq N_n = N$$

tal que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ el cociente N_i/N_{i-1} es simple, podemos asumir que el módulo N es simple.

Si N es trivial, entonces la sucesión se parte por 3.3.2. Supongamos, entonces, que no es trivial. Sea c_N el carácter central de N, que no es nulo. Sabemos que conmuta el diagrama de flechas sólidas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "c_N^{-1}\Omega_N"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "c_N^{-1}\Omega_M"] \arrow[dl, dotted, "r"'] & k \arrow[r] \arrow[d, "c_N^{-1}\Omega_k"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & k \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como $\Omega_k = 0$, es $\mathsf{im}\, c_N^{-1}\Omega_M \subseteq \mathsf{im}\, f$ y el morfismo $c_N\Omega_M$ se factoriza por un morfismo $r : M \to N$. Como $c_N\Omega_N = \mathrm{id}_N$, vemos que r es una retracción para f y que (18) se parte. □

{p:sl2:ss} **3.3.10. Proposición.** *La categoría ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$ es semisimple.*

Demostración. Sea $i : M \to N$ un monomorfismo en ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$. Aplicando el functor exacto $\mathsf{hom}(-, M)$ obtenemos la fila del siguiente diagrama, que es exacta:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{C}\mathrm{id}_M \arrow[d, hook, "j"] \arrow[dl, dotted, "j'"'] & \\
\mathsf{hom}(N, M) \arrow[r, "i^*"] & \mathsf{hom}(M, M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

El subespacio de $\mathsf{hom}(M, M)$ generado por id_M es un submódulo trivial, así que el diagrama completo es un diagrama en ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$. Como, de acuerdo a 3.3.9 $\mathbb{C}\mathrm{id}_M$ es un objeto proyectivo de esa categoría, existe un morfismo $j' : \mathbb{C}\mathrm{id}_N \to \mathsf{hom}(N, M)$ de $\mathfrak{g}$-módulos tal que $i^* \circ j' = j$. En particular, el morfismo

$$r = j'(\mathrm{id}_M) \in \mathsf{hom}(N, M)^{\mathfrak{g}} = \mathsf{hom}_{\mathfrak{g}}(N, M)$$

es tal que $r \circ i = i^*(r) = \mathrm{id}_M$. Así, vemos que el monomorfismo i se parte.

Esto prueba que todo monomorfismo de ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$ se parte, así que todo objeto de esa categoría es inyectivo y, en particular, la categoría es semisimple. □

{p:sl2:sum-of-Vrs} **3.3.11. Corolario.** *Todo objeto de ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$ es isomorfo a una suma directa de $\mathfrak{g}$-módulos simples. En particular, todo objeto de ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$ es un $\mathfrak{g}$-módulo de peso con pesos en $\mathbb{Z}$.*

Demostración. Todo objeto $M \in {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$ tiene una filtración

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M$$

tal que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ el cociente M_i/M_{i-1} es simple. Como ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$ es semisimple de acuerdo a 3.3.10, es claro que entonces

$$M \cong \bigoplus_{i=1}^{n} M_i/M_{i-1}.$$ □

3.4. Carácteres

{p:sl2:K:base} **3.4.1. Proposición.** *El grupo abeliano $K({}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod})$ es libre y $\{[\![V_r]\!] : r \in \mathbb{N}_0\}$ es una base.*

Demostración. De 3.3.10 sabemos que ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$ es semisimple y de 3.2.8 y 3.2.9 que $\{V_r : r \in \mathbb{N}_0\}$ es un sistema completo de representantes de las clases de isomorfismo de objetos simples de ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$. La proposición, entonces, es consecuencia de A.4.3.4. □

3.4.2. Sea $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ la subálgebra de Lie abeliana de dimensión 1 generada por h y sea $\iota : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ el morfismo de inclusión. Sea además $\Gamma = \mathbb{Z}h \subset \mathfrak{h}$ el subgrupo aditivo generado por h.

3.4.3. Es claro que $\mathfrak{h}^*_\Gamma = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* : \lambda(\Gamma) \subseteq \mathbb{Z}\}$ es un grupo cíclico infinito y que un generador es la funcional lineal $h^\vee : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ tal que $h^\vee(h) = 1$, de manera que hay un isomorfismo de grupos $\mathfrak{h}^*_\Gamma \to \mathbb{Z}$ tal que $h^\vee \mapsto 1$. Desde ahora consideraremos a este isomorfismo como una identificación. En particular, el álgebra de grupo $\mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*_\Gamma]$ de $\mathfrak{h}^*_\Gamma$ quedará identificada con el anillo $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ de polinomios de Laurent en la variable q.

{p:sl2:K:iVr} **3.4.4. Lema.** *Sea $r \in \mathbb{N}_0$. Entonces hay un isomorfismo*

$$\iota^* V_r \cong \bigoplus_{i=0}^{r} \mathbb{C}_{r-2i}$$

en ${}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}_\Gamma$ y

$$[\![\iota^* V_r]\!] = q^{-r} + q^{-r+2} + \cdots + q^{r-2} + q^r = \frac{q^{-r-r} - q^{r+1}}{q^{-1} - q}$$

en $K({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}_\Gamma)$.

Demostración. La primera afirmación es consecuencia directa de la descripción dada en 3.2.7 para los subespacios de peso de V_r. Por otro lado, la segunda sigue de la primera recordando que $[\![C_{r-2i}]\!] = q^{r-2i}$ en nuestra notación. □

3.4.5. Proposición. *El functor $\iota^* : {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod} \to {}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}$ de cambio de álgebra a lo largo de ι refleja isomorfismos: si M, $N \in {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$ son tales que $\iota^* M \cong \iota^* N$, entonces $M \cong N$. La imágen de ι^* está contenida en ${}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}_\Gamma$.*

Desde ahora consideramos a ι^* como un functor ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod} \to {}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}_\Gamma$.

Demostración. To be done □

3.4.6. Proposición. *El morfismo $K(\iota^*) : K({}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}) \to K({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}_{\Gamma})$ inducido como en* **1.8.8** *por el functor tensorial exacto $\iota^* : {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod} \to {}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}_{\Gamma}$ es un monomorfismo.*

Demostración. Supongamos que $\xi \in K({}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod})$ es tal que $K(\iota^*)(\xi) = 0$ y sean M, $N \in {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$ tales que $\xi = [\![M]\!] - [\![N]\!]$. Entonces $K(\iota^*)(\xi) = [\![\iota^* M]\!] - [\![\iota^* N]\!]$, de manera que $[\![\iota^* M]\!] = [\![\iota^* N]\!]$ y, en vista de **A.4.3.5**, podemos concluir que $\iota^* M \cong \iota^* N$. Como ι^* refleja isomorfismos, vemos que $M \cong N$ y, en consecuencia, que $\xi = 0$. □

{p:sl2:CG} **3.4.7. Proposición.** (Fórmula de Clebsch-Gordan) *Si $0 \leq s \leq r$, entonces hay un isomorfismo*

$$V_r \otimes V_s \cong V_{r+s} \oplus V_{r+s-2} \oplus \cdots V_{r-s+2} \oplus V_{r-s}.$$

en ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$.

Notemos que cuando $s > r$ vale una fórmula análoga, ya que el producto tensorial en ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$ es conmutativo.

Demostración. Como ι^* es un functor tensorial, es

$$\begin{aligned}
K(\iota^*)([\![V_r \otimes V_s]\!]) &= [\![\iota^*(V_r \otimes V_s)]\!] = [\![\iota^* V_r]\!]\,[\![\iota^* V_s]\!] \\
&= \frac{q^{-r-1} - q^{r+1}}{q^{-1} - q} \, \frac{q^{-s-1} - q^{s+1}}{q^{-1} - q} \\
&= \frac{1}{q^{-1} - q} \left(\frac{q^{-r-s-2} - q^{-r+s}}{q^{-1} - q} - \frac{q^{r-s} - q^{r+s+2}}{q^{-1} - q} \right) \\
&= \frac{1}{q^{-1} - q} \Big((q^{-r-s-1} + q^{-r-s+1} + \cdots + q^{-r+s-3} + q^{-r+s-1}) \\
&\qquad\qquad - (q^{r-s+1} + q^{r-s+3} + \cdots + q^{r+s-1} + q^{r+s+2}) \Big) \\
&= \frac{q^{-r-s-1} - q^{r+s+1}}{q^{-1} - q} + \frac{q^{-r-s+1} - q^{r+s-1}}{q^{-1} - q} \\
&\qquad + \cdots + \frac{q^{-r+s-3} - q^{r-s+3}}{q^{-1} - q} + \frac{q^{-r+s-1} - q^{r-s+1}}{q^{-1} - q} \\
&= [\![\iota^* V_{r+s}]\!] + [\![\iota^* V_{r+s-2}]\!] + \cdots + [\![\iota^* V_{r-s+2}]\!] + [\![\iota^* V_{r-s}]\!] \\
&= [\![\iota^* V_{r+s} \oplus \iota^* V_{r+s-2} \oplus \cdots \oplus \iota^* V_{r-s+2} \oplus \iota^* V_{r-s}]\!] \\
&= [\![\iota^*(V_{r+s} \oplus V_{r+s-2} \oplus \cdots \oplus V_{r-s+2} \oplus V_{r-s})]\!] \\
&= K(\iota^*)([\![V_{r+s} \oplus V_{r+s-2} \oplus \cdots \oplus V_{r-s+2} \oplus V_{r-s}]\!]).
\end{aligned}$$

Como el morfismo $K(\iota^*)$ es inyectivo, esto implica que

$$[\![V_r \otimes V_s]\!] = [\![V_{r+s} \oplus V_{r+s-2} \oplus \cdots V_{r-s+2} \oplus V_{r-s}]\!]$$

y la proposición sigue de **A.4.3.5**. □

{p:sl2:K:ring} **3.4.8. Proposición.** *El anillo $K({}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod})$ está generado por $[\![V_1]\!]$ y, más aún, el morfismo de anillos $\varphi : \mathbb{Z}[X] \to K({}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod})$ tal que $\varphi(X) = [\![V_1]\!]$ es un isomorfismo.*

Demostración. De acuerdo a **3.4.7**, para cada $s \geq 1$ es $V_s \otimes V_1 \cong V_{s-1} \oplus V_{s+1}$, así que

$$[\![V_{s+1}]\!] = [\![V_s]\!]\,[\![V_1]\!] - [\![V_{s-1}]\!]$$

en $K({}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod})$. Por inducción, entonces, vemos que el subanillo generado por $[\![V_1]\!]$ en $K({}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod})$ contiene a $\{[\![V_r]\!] : r \in \mathbb{N}_0\}$, así que coincide de hecho con $K({}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod})$.

Para ver la segunda afirmación del enunciado, supongamos que tenemos un polinomio no nulo $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X] \setminus 0$ tal que $f(\llbracket V_1 \rrbracket) = 0$ y, sin pérdida de generalidad, que $a_n \neq 0$.

Recordemos de A.4.3.2 que existe un morfismo de grupos $\delta_{V_n} : K({}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}) \to \mathbb{Z}$ tal que si $M \in {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$, entonces

$$\delta_{V_n}(\llbracket M \rrbracket) = \dim_{\mathsf{End}_{{}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}}(V_r)} \mathsf{hom}_{{}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}}(V_r, M).$$

Como $\mathsf{End}_{{}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}}(V_r)$ es una $\mathbb{C}$-álgebra de división de dimensión finita es, de hecho, $\mathsf{End}_{{}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}}(V_r) = \mathbb{C}$, y la estructura canónica de $\mathsf{End}_{{}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}}(V_r)$-espacio vectorial derecho de $\mathsf{hom}_{{}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}}(V_r, M)$ se identifica con la estructura usual de $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Afirmamos que es

{p:sl2:K:ring:1}
$$\delta_{V_r}(\llbracket V_1^{\otimes s} \rrbracket) = \begin{cases} 0, & \text{si } s < r; \text{ y} \\ 1, & \text{si } s = r. \end{cases} \tag{19}$$

siempre que $0 \leq s \leq r$. En efecto, esto sigue inmediatamente de 3.4.7 por inducción, recordando que

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathsf{hom}_{{}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}}(V_r, V_s) = \begin{cases} 0, & \text{si } s < r; \text{ y} \\ 1, & \text{si } s = r. \end{cases}$$

Ahora bien, usando (19) podemos calcular que

$$0 = \delta_{V_n}(f(\llbracket V_1 \rrbracket)) = \sum_{i=0}^{n} a_i \delta_{V_n}(\llbracket V_1^{\otimes i} \rrbracket) = a_n,$$

lo que es absurdo. Esto prueba la proposición. □

3.5. Construcciones

3.5.1. *Espacios duales*

{p:sl2:dual} **3.5.1.1. Proposición.** *Cualquiera sea $M \in {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$, se tiene que $M^* \cong M$.*

Demostración. Sea $M \in {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$ un objeto simple y sea M^* su dual. Supongamos que $N \subsetneq M^*$ es un submódulo propio no trivial de M^*. Es fácil ver que

$$N^\circ = \{m \in M : \varphi(m) = 0 \text{ para todo } \varphi \in N\}$$

es un submódulo de M así que, como M es simple, o bien $N^\circ = 0$ o bien $N^\circ = M$. La primera alternativa no ocurre, porque en ese caso sería $N = M^*$, mientras que la segunda no ocurre porque $N \neq 0$. Esto es absurdo. Así, vemos que M^* es un $\mathfrak{g}$-módulo simple. Como $\dim_{\mathbb{C}} M^* = \dim_{\mathbb{C}} M$ y hay una sola clase de isomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos simples de cada dimensión, vemos que debe ser $M^* \cong M$.

Vemos así que la afirmación del enunciado es cierta cuando M es simple. El resultado general sigue inmediatamente de esto. □

3.5.2. *Potencias simétricas*

3.5.2.1. Consideremos el diagrama conmutativo de grupos abelianos

$$\begin{tikzcd} K({}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}) \arrow[r, "K(\iota^*)"] \arrow[d, "\psi_S"'] & K({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}_\Gamma^{\mathsf{ss}}) \arrow[d, "\psi_S"] \\ K({}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod})\llbracket T \rrbracket^\times \arrow[r, "K(\iota^*)"] & K({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}_\Gamma^{\mathsf{ss}})\llbracket T \rrbracket^\times \end{tikzcd}$$

Evaluando las dos composiciones correspondientes en $[\![V_r]\!]$, vemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{d\geq 0}\chi(S^d V_r)\, T^d &= K(\iota^*)(\psi_S([\![V_r]\!])) = \psi_S([\![\iota^* V_r]\!]) \\
&= \psi_S(\sum_{i=0}^{r}[\![\mathbb{C}_{r-2i}]\!]) && \text{por } 3.4.4 \\
&= \prod_{i=0}^{r}\psi_S([\![\mathbb{C}_{r-2i}]\!]) && \text{porque } \psi_\Lambda \text{ es un morfismo de grupos} \\
&= \prod_{i=0}^{r}\sum_{d\geq 0}[\![\mathbb{C}_{rd-2id}]\!]\, T^d
\end{aligned}$$

y esto, de acuerdo a nuestras identificaciones, es

$$\begin{aligned}
&= \prod_{i=0}^{r}\sum_{d\geq 0} q^{rd-2id} T^d \\
&= \sum_{d\geq 0}\Big(\sum_{d_0+\cdots+d_r=d} q^{rd-2(0d_0+1d_1+\cdots+rd_r)}\Big) T^d.
\end{aligned}$$

Entonces es

{eq:sl2:sym:chi}
$$\chi(S^d V_r) = \sum_{d_0+\cdots+d_r=d} q^{rd-2(0d_0+1d_1+\cdots+rd_r)}. \tag{20}$$

3.5.2.2. Escribamos $\underline{\pi}(r,d,n)$ al conjunto de particiones de n que tienen a lo sumo d partes, cada una de ellas de tamaño a lo sumo r, y sea $\pi(n,r,d) = |\underline{\pi}(n,r,d)|$. Si $d < 0$ o si n no es entero, convengamos en poner $\pi(r,d,n) = 0$.

{p:sl2:sym:chi} **3.5.2.3. Proposición.** *Si r, $d \in \mathbb{N}_0$, entonces*

$$\chi(S^d V_r) = \sum_{n\geq 0}\pi(r,d,n) q^{rd-2n}.$$

Demostración. De acuerdo a (20), el coeficiente de q^{rd-2n} en $\chi(S^d V_r)$ es igual a la cantidad de elementos del conjunto $J(r,d,n)$ de $(r+1)$-uplas $\delta = (d_0,\ldots,d_r)$ de enteros no negativos tales que $d_0+\cdots+d_r = d$ y $0d_0+1d_1+\cdots+rd_r = n$. Ahora bien, dada una tal $(r+1)$-upla $\delta \in J(r,d,n)$, podemos construir una partición $\delta' = 1^{d_1}2^{d_2}\cdots r^{d_r} \in \underline{\pi}(r,d,n)$, y esto define de hecho una función $\alpha : \delta \in J(r,d,n) \mapsto \delta' \in \underline{\pi}(r,d,n)$. Más aún, no es dificil convencerse de que esta función es biyectiva. La igualdad que se afirma en la proposición sigue inmediatamente de esto. □

3.5.2.4. El siguiente resultado fue enunciado por Arthur Cayley en 1856 [Cay89] y probado por primera vez por James Joseph Sylvester en 1878 [Syl74]:

{p:sl2:sym:mult} **Proposición.** *Sean r, s, $d \in \mathbb{N}_0$. Entonces la multiplicidad de V_s como factor de composición de $S^d V_r$ es*

$$[S^d V_r : V_s] = \pi(r,d,\tfrac{1}{2}(rd-s)) - \pi(r,d,\tfrac{1}{2}(rd-s)-1).$$

Demostración. De acuerdo a 3.5.2.3

$$\begin{aligned}
(q-q^{-1})\chi(S^d V_r) &= (q-q^{-1})\sum_{n\geq 0}\pi(r,d,n)q^{rd-2n} \\
&= \sum_{n\geq 0}\pi(r,d,n)q^{rd-2n+1} - \sum_{n\geq 0}\pi(r,d,n)q^{rd-2n-1}
\end{aligned}$$

	d				
r	0	1	2	3	4
0	0^1	0^1	0^1	0^1	0^1
1	0^1	1^1	2^1	3^1	4^1
2	0^1	2^1	$0^1 4^1$	$2^1 6^1$	$0^1 4^1 8^1$
3	0^1	3^1	$2^1 6^1$	$3^1 5^1 9^1$	$0^1 4^1 6^1 8^1 12^1$
4	0^1	4^1	$0^1 4^1 8^1$	$0^1 4^1 6^1 8^1 12^1$	$0^1 4^2 8^2 10^1 12^1 16^1$
5	0^1	5^1	$2^1 6^1 10^1$	$3^1 5^1 7^1 9^1 11^1 15^1$	$0^1 4^2 6^1 8^2 10^1 12^2 14^1 16^1 20^1$
6	0^1	6^1	$0^1 4^1 8^1 12^1$	$2^1 6^2 8^1 10^1 12^1 14^1 18^1$	$0^2 4^2 6^1 8^3 10^1 12^3 14^1 16^2 18^1 20^1 24^1$

CUADRO 1. Descomposición de $S^d V_r$ como suma de módulos irreducibles. Aquí $2^1 6^2$ denota a $V_2 \oplus 2V_6$, por ejemplo.

{cuadro:sl2:sym}

y cambiando a n por $n-1$ en esta segunda suma, vemos que esto es

$$= \sum_{n \geq 0} \big(\pi(r,d,n) - \pi(r,d,n-1)\big) q^{rd-2n+1}.$$

Ahora bien, la multiplicidad $[S^d V_r : V_s]$ es precisamente el coeficiente de q^{s+1} en $(q - q^{-1})\chi(S^d V_r)$, y es fácil ver que éste está dado precisamente por la expresión que aparece en el enunciado. □

3.5.2.5. Usando esta proposición es posible calcular explicitamente: en el cuadro 1 damos algunos ejemplos.

3.5.2.6. Es una consecuencia inmediata de 3.5.2.4 que $\pi(r,d,k) - \pi(r,d,k-1) \geq 0$ si $0 < k \leq rd/2$. En [O'H90] Kathleen O'Hara logró obtener una prueba de este resultado de caracter puramente combinatorio.

{p:sl2:hermite} **3.5.2.7. Corolario.** (Reciprocidad de Hermite) *Si r, $d \geq 0$, entonces $S^d V_r \cong S^r V_d$.*

Demostración. De acuerdo a 3.5.2.3, alcanza con mostrar que

{eq:sl2:hermite:0}
$$\pi(r,d,n) = \pi(d,r,n) \tag{21}$$

si r, d, $n \in \mathbb{N}_0$.

Sea $p = (p_1, p_2, \dots, p_d) \in \underline{\pi}(r,d,n)$, de manera que $p_1 + \cdots + p_r = n$ y $d \geq p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_d \geq 0$. Para cada $i \in \{1, \dots, r\}$, sea

$$p'_i = |\{j \in \{1, \dots, d\} : p_j \geq i\}|.$$

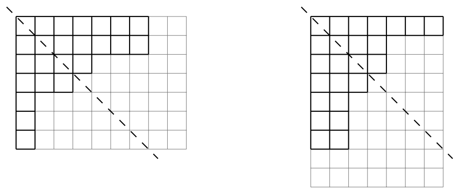
Es claro que $r \geq p'_1 \geq p'_2 \geq \cdots \geq p'_r \geq 0$ y, como

$$\sum_{i=1}^{r} p'_i = \big|\{(i,j)\} \in \{1, \dots, r\} \times \{1, \dots, d\} : p_j \geq i\}\big| = \sum_{j=1}^{d} p_j = n,$$

vemos que $p' = (p'_1, \dots, p'_r) \in \underline{\pi}(d,r,n)$. La partición p' es la *transpuesta* de p: su diagrama de Young se obtiene del de p mediante una simetría con respecto a la diagonal principal; ver, por ejemplo, la figura 1. Es fácil ver que la aplicación $p \in \underline{\pi}(r,d,n) \mapsto p' \in \underline{\pi}(d,r,n)$ es una biyección. Esto prueba (21). □

3.5.2.8. Corolario. *Si $d \geq 0$, entonces $S^d V_1 \cong V_d$.*

Demostración. Basta tomar $r = 1$ en 3.5.2.7. □



{fig:sl2:transpose} Figura 1. El diagrama de Young de la izquierda corresponde a la partición $p = 7^2 4 3 1^3 \in \underline{\pi}(9,7,24)$, mientras que el de la derecha corresponde a la partición transpuesta $p' = 7 4^2 3 2^3 \in \underline{\pi}(7,9,24)$.

3.5.3. *Potencias exteriores*

3.5.3.1. Procedemos con la descripción de las potencias exteriores de los módulos simples de manera similar a lo hecho antes con las potencias simétricas. Sabemos qu el diagrama de grupos abelianos

$$\begin{tikzcd} K({}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}) \arrow[r, "K(\iota^*)"] \arrow[d, "\psi_\Lambda"'] & K({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}_{\Gamma}) \arrow[d, "\psi_\Lambda"] \\ K({}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod})[\![T]\!]^\times \arrow[r, "K(\iota^*)"] & K({}_{\mathfrak{h}}\mathsf{mod}^{\mathsf{ss}}_{\Gamma})[\![T]\!]^\times \end{tikzcd}$$

conmuta, así que evaluando ambas composiciones en $[\![V_r]\!]$ vemos que

$$\begin{aligned} \sum_{d\geq 0} \chi(\Lambda^d V_r) T^d &= K(\iota^*)\big(\psi_\Lambda([\![V_r]\!])\big) = \psi_\Lambda([\![\iota^* V_r]\!]) \\ &= \psi_\Lambda\Big(\sum_{i=0}^r [\![\mathbb{C}_{r-2i}]\!]\Big) && \text{por 3.4.4} \\ &= \prod_{i=0}^r \psi_\Lambda([\![\mathbb{C}_{r-2i}]\!]) && \text{porque } \psi_\Lambda \text{ es un morfismo de grupos} \\ &= \prod_{i=0}^r (1 + [\![\mathbb{C}_{r-2i}]\!]\, T) && \text{de acuerdo a 2.3.5} \end{aligned}$$

y esto, es nuestra notación, es lo mismo que

$$\begin{aligned} &= \prod_{i=0}^r (1 + q^{r-2i}\, T) \\ &= \sum_{d=0}^{r+1} \left(\sum_{0\leq i_1 < \cdots < i_d \leq r} q^{rd-2(i_1+\cdots+i_d)} \right) T^d. \end{aligned}$$

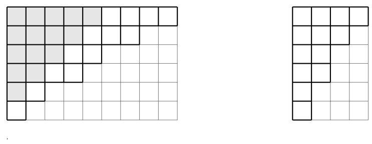
Concluimos así que si $0 \leq d \leq r+1$ es

{eq:sl2:lambda:chi}
$$\chi(\Lambda^d V_r) = \sum_{0\leq i_1 < \cdots < i_d \leq r} q^{rd-2(i_1+\cdots+i_d)} \tag{22}$$

Por supuesto, si $d > r+1$ es $\Lambda^d V_r = 0$, ya que $\dim_{\mathbb{C}} V_r = r+1$.

{p:sl2:lambda:chi} **3.5.3.2. Proposición.** *Si r, $d \in \mathbb{N}_0$ son tales que $0 \leq d \leq r+1$, entonces*

$$\chi(\Lambda^d V_r) = \sum_{n \geq \frac{1}{2}d(d-1)} \pi\big(r-d+1, d, n - \tfrac{1}{2}d(d-1)\big)\, q^{rd-2n}.$$



{fig:sl2:lambda:map} FIGURA 2. La construcción de la prueba de 3.5.3.2. A la izquierda tenemos el diagrama de Young de la partición $i = 975421 \in I(7,6,28)$ y a la derecha el de la partición $i' = 432211 \in \underline{\pi}(4,6,13)$, que resulta de i de eliminar la parte sombreada.

Demostración. Para verlo, observemos que es claro de (22) que si $I(r,d,n)$ es el conjunto de las d-uplas $i = (i_1, i_2, \cdots, i_d)$ de enteros no negativos tales que $i_1 + \cdots + i_d = n$ y

{eq:sl2:lambda:chi:0}
$$r \geq i_d > i_{d-1} > \cdots > i_1 \geq 0, \tag{23}$$

entonces

{eq:sl2:lambda:chi:1}
$$\chi(\Lambda^d V_r) = \sum_{n\geq 0} |I(r,d,n)|\, q^{rd-2n}. \tag{24}$$

Sea $i = (i_1, \dots, i_d) \in I(r,d,n)$ y consideremos a d-upla

$$i' = (i'_1, \dots, i'_d) = (i_1 - 0, \dots, i_j - j + 1, \dots, i_d - d + 1).$$

Es fácil ver a partir de (23) que $j - 1 \leq i_j \leq r - d + j$ para cada $j \in \{1, \dots, d\}$, de manera que $0 \leq i'_j \leq r - d + 1$ para cada valor de j, y que $i'_j \leq i'_{j+1}$ si $j \in \{1, \dots, d-1\}$. Como

$$\sum_{j=1}^{d} i'_j = \sum_{j=1}^{d} i_d - \sum_{j=1}^{d} (j-1) = n - \tfrac{1}{2}d(d-1),$$

vemos entonces que $i' \in \pi(r-d+1, d, n - \frac{1}{2}d(d-1))$; en la figura 2 damos un ejemplo de esta construcción. Podemos ahora definir una función

$$\alpha : i \in I(r,d,n) \mapsto i' \in \underline{\pi}(r-d+1, d, n - \tfrac{1}{2}d(d-1)).$$

Más aún, es fácil ver que esta función es de hecho biyectiva. Esto y (24) implican inmediatamente la igualdad del enunciado. □

{p:sl2:lambda:sym} **3.5.3.3. Corolario.** *Sean r, $d \in \mathbb{N}_0$ tales que $0 \leq d \leq r+1$. Entonces hay un isomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos*

$$\Lambda^d V_r \cong S^d V_{r+1-d}.$$

Demostración. De acuerdo a 3.5.2.3, es

$$\chi(S^d V_{r+1-d}) = \sum_{n\geq 0} \pi(r+1-d, d, n)\, q^{(r+1-d)d-2n}$$

y, si cambiamos n por $n - \frac{1}{2}d(d-1)$ es esta suma, vemos que esto es

$$= \sum_{n \geq \frac{1}{2}d(d-1)} \pi(r+1-d, d, n - \tfrac{1}{2}d(d-1))\, q^{rd-2n}$$
$$= \chi(\Lambda^d V_r).$$

Se sigue de esto que $S^d V_{r+1-d} \cong \Lambda^d V_r$, como afirma el corolario. □

	d								
r	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0^1	0^1							
1	0^1	1^1	0^1						
2	0^1	2^1	2^1	0^1					
3	0^1	3^1	$0^1 4^1$	3^1	0^1				
4	0^1	4^1	$2^1 6^1$	$2^1 6^1$	4^1	0^1			
5	0^1	5^1	$0^1 4^1 8^1$	$3^1 5^1 9^1$	$0^1 4^1 8^1$	5^1	0^1		
6	0^1	6^1	$2^1 6^1 10^1$	$0^1 4^1 6^1 8^1 12^1$	$0^1 4^1 6^1 8^1 12^1$	$2^1 6^1 10^1$	6^1	0^1	
7	0^1	7^1	$0^1 4^1 8^1 12^1$	$3^1 5^1 7^1 9^1 11^1 15^1$	$0^1 4^2 8^2 10^1 12^1 16^1$	$3^1 5^1 7^1 9^1 11^1 15^1$	$0^1 4^1 8^1 12^1$	7^1	0^1

CUADRO 2. Descomposición de $\Lambda^d V_r$ como suma de módulos irreducibles.

{cuadro:sl2:lambda}

{p:sl2:lambda:mult} **3.5.3.4.** De 3.5.3.3 y 3.5.2.4 vemos que si r, s, $d \in \mathbb{N}_0$ tales que $1 \leq d \leq r+1$, la multiplicidad de V_s como factor de composición de $\Lambda^d V_r$ es

$$[\Lambda^d V_r : V_s] = \pi\Big(r-d+1, d, \tfrac{1}{2}((r-d+1)d-s)\Big) \\ - \pi\Big(r-d+1, d, \tfrac{1}{2}((r-d+1)d-s)-1\Big).$$

Usando esto podemos ver que

$$\Lambda^4 V_7 \cong V_0 \oplus 2V_4 \oplus 2V_8 \oplus V_{10} \oplus V_{12} \oplus V_{16}.$$

En efecto, tenemos por ejemplo que $[\Lambda^4 V_7 : V_8] = \pi(4,4,4) - \pi(4,4,3) = 2$. En el cuadro 2 damos otros ejemplos.

3.5.4. *Formas bilineales*

{p:sl2:forma} **3.5.4.1. Proposición.** *Sea $M \in {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$ un módulo simple de dimensión $r+1$.*

(i) *Es $\dim_{\mathbb{C}} \mathsf{Bil}_{\mathfrak{g}}(M) = 1$.*
(ii) *Más aún, toda forma bilineal sobre M $\mathfrak{g}$-invariante y no nula es no degenerada.*
(iii) *Si r es par, entonces toda forma bilineal no nula $\mathfrak{g}$-invariante sobre M es simetrica. Si, por el contrario, r es impar, entonces toda forma bilineal no nula $\mathfrak{g}$-invariante sobre M es antisimetrica.*

Demostración. Tenemos que mostrar que $\mathsf{hom}_{\mathfrak{g}}(M \otimes M, \mathbb{C})$ tiene dimensión 1. De acuerdo a **1.8.6**, es $\mathsf{hom}_{\mathfrak{g}}(M \otimes M, \mathbb{C}) \cong \mathsf{hom}_{\mathfrak{g}}(M, M^*)$ y, como $M^* \cong M$ por **3.5.1.1** y M es simple, el lema de Schur da *(i)*.

Por otro lado, sea $\varphi : M \times M \to \mathbb{C}$ una forma bilineal $\mathfrak{g}$-invariante no nula y sea $\ker \varphi = \{m \in M : \varphi(m,n) = 0 \text{ para todo } n \in M\}$. Es consecuencia inmediata de la invariancia de φ que $\ker \varphi$ es un submódulo de M. Como M es simple por hipótesis, debe ser o $\ker \varphi = 0$ o $\ker \varphi = M$. Pero φ no es nula, así que la segunda posibilidad no ocurre. Concluimos entonces que $\ker \varphi = 0$, esto es, que φ es no degenerada, probando *(ii)*.

Como M es simple y $\dim_{\mathbb{C}} M = r+1$, sabemos que $M \cong V_r$. Mostramos en 3.5.2.4 que

$$[S^2 V_r : V_0] = \pi(r,2,r) = \pi(r,2,r-1)$$

y es fácil ver que esto es

$$= \left\lceil \frac{r+1}{2} \right\rceil - \left\lfloor \frac{r+1}{2} \right\rfloor$$
$$= \begin{cases} 1, & \text{si } r \text{ es par;} \\ 0, & \text{si } r \text{ es impar.} \end{cases}$$

Esto implica inmediatamente que

{eq:sl2:forma:rule}
$$\dim_{\mathbb{C}} \mathsf{hom}_{\mathfrak{g}}(S^2V_r, \mathbb{C}) = \begin{cases} 1, & \text{si } r \text{ es par;} \\ 0, & \text{si } r \text{ es impar.} \end{cases} \tag{25}$$

Ahora bien, como hay un isomorfismo $V_r \otimes V_r \cong S^2V_r \oplus \Lambda^2 V$, es

$$\mathsf{Bil}_{\mathfrak{g}}(V_r) = \mathsf{hom}_{\mathfrak{g}}(V_r \otimes V_r, \mathbb{C}) \cong \mathsf{hom}_{\mathfrak{g}}(S^2V_r, \mathbb{C}) \oplus \mathsf{hom}_{\mathfrak{g}}(\Lambda^2 V_r, \mathbb{C})$$

y, como ya sabemos que el espacio de la izqueirda tiene dimensión 1, o bien $\mathsf{hom}_{\mathfrak{g}}(S^2V_r, \mathbb{C}) = 0$ y $\dim_{\mathbb{C}} \oplus \mathsf{hom}_{\mathfrak{g}}(\Lambda^2V_r, \mathbb{C}) = 1$, o bien $\mathsf{hom}_{\mathfrak{g}}(\Lambda^2V_r, \mathbb{C}) = 0$ y $\dim_{\mathbb{C}} \oplus \mathsf{hom}_{\mathfrak{g}}(S^2V_r, \mathbb{C}) = 1$. De acuerdo a (25), el primer caso ocurre cuando r es par, y el segundo cuando r es impar. Esto prueba *(iii)*. □

3.5.4.2. Corolario. *Sea $M \in {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{mod}$. Entonces existen formas bilineales $\mathfrak{g}$-invariantes y no degeneradas sobre M. Si $[M : V_{2r+1}] = 0$ para todo $r \in \mathbb{N}_0$, existen formas bilineales $\mathfrak{g}$-invariantes no degeneradas simétricas sobre M. Si, por por otro lado, $[M : V_{2r}] = 0$ para todo $r \in \mathbb{N}_0$, existen formas bilineales $\mathfrak{g}$-invariantes no degeneradas antisimétricas sobre M.;*

Demostración. Esto es consecuencia inmediata de 3.5.4.1 y de que M admite una descomposición como suma directa de $\mathfrak{g}$-módulos simples. □

Apéndice A. Generalidades

A.1. Series de composición

A.1.1. Sea C una categoría abeliana y sea $x \in \mathsf{C}$. Una *serie de composición* para x en C es una cadena

$$0 = x_0 \xrightarrow{\iota_1} x_1 \xrightarrow{\iota_2} x_2 \xrightarrow{\iota_3} \cdots \xrightarrow{\iota_{n-1}} x_{n-1} \xrightarrow{\iota_n} x_n = x$$

de monomorfismos de C tal que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ el conúcleo de ι_i es un objeto simple de C. El número n es la *longitud* de la cadena.

A.1.2. Proposición. (Jordan-Hölder) *Si C es una categoría abeliana, $x \in \mathsf{C}$ y*

$$0 = x_0 \xrightarrow{\iota_1} x_1 \xrightarrow{\iota_2} x_2 \xrightarrow{\iota_3} \cdots \xrightarrow{\iota_{n-1}} x_{n-1} \xrightarrow{\iota_n} x_n = x$$

y

$$0 = x'_0 \xrightarrow{\iota'_1} x'_1 \xrightarrow{\iota'_2} x'_2 \xrightarrow{\iota'_3} \cdots \xrightarrow{\iota'_{m-1}} x'_{m-1} \xrightarrow{\iota'_m} x'_m = x$$

son series de composición para x en C, entonces $n = m$ y existe $\pi \in S_n$ tal que $\operatorname{coker} \iota_i \cong \operatorname{coker} \iota'_{\pi(i)}$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

{p:ser:ext} **A.1.3. Proposición.** *Sea C una categoría abeliana. Si*

$$0 \longrightarrow x' \longrightarrow x \longrightarrow x'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta en C y tanto x' como x'' poseen series de composición, entonces x posee una serie de composición y es $\ell(x) = \ell(x') + \ell(x'')$.

A.2. Categorías tensoriales

{p:def:cat-tensorial} **A.2.1.** Una *categoría tensorial* es una 6-upla $(\mathsf{C}, \otimes, e, \alpha, \lambda, \rho)$ en la que

- C es una categoría,
- $e \in \mathsf{C}$ es un objeto,
- $(-) \otimes (-) : \mathsf{C} \times \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ es un functor,
- $\alpha : \big((-) \otimes (-)\big) \otimes (-) \to (-) \otimes \big((-) \otimes (-)\big)$ es un isomorfismo natural de functores $\mathsf{C} \times \mathsf{C} \times \mathsf{C} \to \mathsf{C}$, y
- $\lambda : e \to (-) \to (-)$ y $\rho : (-) \otimes e \to (-)$ son isomorfismos naturales de funtores $\mathsf{C} \to \mathsf{C}$

tales que para todo $x, y, z, w \in \mathsf{C}$ conmutan los diagramas

$$\begin{tikzcd}
 & ((x \otimes y) \otimes z) \otimes w \arrow[rr, "\alpha_{x,y,z} \otimes \mathrm{id}_w"] \arrow[dl, "\alpha_{x \otimes y, z, w}"'] & & (x \otimes (y \otimes z)) \otimes w \arrow[dr, "\alpha_{x, y \otimes z, w}"] & \\
(x \otimes y) \otimes (z \otimes w) \arrow[drr, "\alpha_{x,y,z \otimes w}"'] & & & & x \otimes ((y \otimes z) \otimes w) \arrow[dll, "\mathrm{id}_x \otimes \alpha_{y,z,w}"] \\
 & & x \otimes (y \otimes (z \otimes w)) & &
\end{tikzcd}$$

y

$$
\begin{tikzcd}
(x \otimes k) \otimes y \arrow[rr, "\alpha_{x,k,y}"] \arrow[dr, "\rho_x \otimes 1"'] & & x \otimes (k \otimes y) \arrow[dl, "1 \otimes \lambda_y"] \\
& x \otimes y &
\end{tikzcd}
$$

{p:def:cat-trenzada} **A.2.2.** Una *categoría tensorial trenzada* es una 7-upla $(\mathsf{C}, \otimes, e, \alpha, \lambda, \rho, \sigma)$ en la que $(\mathsf{C}, \otimes, e, \alpha, \lambda, \rho)$ es una categoría tensorial y σ es isomorfismo natural

$$\sigma_{x,y} : x \otimes y \to y \otimes x$$

tal que para cada x, y, $z \in \mathsf{C}$ conmutan los diagramas

$$
\begin{tikzcd}
& x \otimes (y \otimes z) \arrow[r, "\gamma_{x,y\otimes z}"] & (y \otimes z) \otimes x \arrow[dr, "\alpha_{y,z,x}"] & \\
(x \otimes y) \otimes z \arrow[ur, "\alpha_{x,y,z}"] \arrow[dr, "\gamma_{x,y} \otimes \mathrm{id}_z"'] & & & y \otimes (z \otimes x) \\
& (y \otimes x) \otimes z \arrow[r, "\alpha_{y,x,z}"'] & y \otimes (x \otimes z) \arrow[ur, "\mathrm{id}_y \otimes \gamma_{x,z}"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& (x \otimes y) \otimes z \arrow[r, "\gamma_{x\otimes y,z}"] & z \otimes (x \otimes y) \arrow[dr, "\alpha^{-1}_{z,x,y}"] & \\
x \otimes (y \otimes z) \arrow[ur, "\alpha^{-1}_{x,y,z}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_x \otimes \gamma_{y,z}"'] & & & (z \otimes x) \otimes y \\
& x \otimes (z \otimes y) \arrow[r, "\alpha^{-1}_{y,x,z}"'] & (x \otimes z) \otimes y \arrow[ur, "\gamma_{x,z} \otimes \mathrm{id}_y"'] &
\end{tikzcd}
$$

y

$$
\begin{tikzcd}
x \otimes k \arrow[rr, "\gamma_{x,k}"] \arrow[dr, "\rho_x"'] & & k \otimes x \arrow[dl, "\lambda_y"] \\
& x &
\end{tikzcd}
$$

{p:def:cat-simetrica} **A.2.3.** Una *categoría tensorial simétrica* $(\mathsf{C}, \otimes, e, \alpha, \lambda, \rho, \sigma)$ es una categoría tensorial trenzada en la que

$$\sigma_{y,x} \circ \sigma_{x,y} = \mathrm{id}_{x \otimes y}$$

para cada par de objetos x, $y \in \mathsf{C}$.

A.2.4. Si $(\mathsf{C}, \otimes, e, \alpha, \lambda, \rho)$ y $(\mathsf{C}', \otimes', e', \alpha', \lambda', \rho')$ son categorías tensoriales, un *functor tensorial* $(F, \varphi^0, \varphi^2) : (\mathsf{C}, \otimes, e, \alpha, \lambda, \rho) \to (\mathsf{C}', \otimes', e', \alpha', \lambda', \rho')$ es una terna en la que $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ es un functor, $\varphi^0 : e' \to F(e)$ es un isomorfismo de C' y φ^2 es un isomorfismo natural

$$\varphi^2_{x,y} : F(x) \otimes' F(y) \to F(x \otimes y)$$

tales que para cada x, y, $z \in \mathsf{C}$ conmutan los diagramas

$$\begin{tikzcd}
 & F(x)\otimes'(F(y)\otimes' F(z)) \arrow[r, "\mathrm{id}_{F(x)}\otimes'\varphi^2_{y,z}"] & F(x)\otimes' F(y\otimes z) \arrow[dr, "\varphi^2_{x,y\otimes z}"] & \\
(F(x)\otimes' F(y))\otimes' F(z) \arrow[ur, "\alpha'_{F(x),F(y),F(z)}"] \arrow[dr, "\varphi^2_{x,y}\otimes'\mathrm{id}_{F(z)}"'] & & & F(x\otimes(y\otimes z)) \\
 & F(x\otimes y)\otimes' F(z) \arrow[r, "\varphi^2_{x\otimes y,z}"'] & F((x\otimes y)\otimes z) \arrow[ur, "F(\alpha_{x,y,z})"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
e'\otimes' F(x) \arrow[r, "\lambda'_{F(x)}"] \arrow[d, "\varphi^0\otimes'\mathrm{id}_{F(x)}"'] & F(x) \\
F(e)\otimes' F(x) \arrow[r, "\varphi^2_{e,x}"] & F(e\otimes x) \arrow[u, "F(\lambda_x)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(x)\otimes' e' \arrow[r, "\rho'_{F(x)}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{F(x)}\otimes'\varphi^0"'] & F(x) \\
F(x)\otimes' F(e) \arrow[r, "\varphi^2_{e,x}"] & F(x\otimes e) \arrow[u, "F(\rho_x)"']
\end{tikzcd}$$

Decimos que el functor (F,φ^0,φ^2) es *estricto* si φ^0 y φ^2 son identidades.

A.2.5. Dados functores tensoriales

$$(F,\varphi^0,\varphi^2) : (\mathsf{C},\otimes,e,\alpha,\lambda,\rho) \to (\mathsf{C}',\otimes',e',\alpha',\lambda',\rho')$$

y

$$(F',\varphi'^0,\varphi'^2) : (\mathsf{C}',\otimes',e',\alpha',\lambda',\rho') \to (\mathsf{C}'',\otimes'',e'',\alpha'',\lambda'',\rho''),$$

la composición de (F,φ^0,φ^2) y $(F',\varphi'^0,\varphi'^2)$ es el functor tensorial

$$(G,\psi^0,\psi^2) : (\mathsf{C},\otimes,e,\alpha,\lambda,\rho) \to (\mathsf{C}'',\otimes'',e'',\alpha'',\lambda'',\rho'')$$

tal que $G = F'\circ F$, $\psi^0 = F(\varphi^0)\circ\varphi'^0 : e'' \to G(e)$ y, para cada x, $y \in \mathsf{C}$, $\psi^2_{x,y} : G(x)\otimes'' G(y) \to G(x\otimes Y)$ es la composición

$$(F'\circ F)(x)\otimes''(F'\circ F)(y) \xrightarrow{\varphi'^2_{F(x),F(y)}} F'(F(x)\otimes' F(y)) \xrightarrow{F'(\varphi^2_{x,y})} (F'\circ F)(x\otimes y)$$

Es inmediato verificar que esto define en efecto un functor tensorial.

A.2.6. Notamos $\mathsf{cat}^{\otimes}$ a la categoría cuyos objetos son las categorías tensoriales con categorías subyacentes esencialmente pequeñas y en la que los morfismos son los functores tensoriales.

{p:def:k-cats} **A.2.7.** Sea k un anillo conmutativo. Una *k-categoría tensorial* es una categoría tensorial $(\mathsf{C},\otimes,e,\alpha,\lambda,\rho)$ tal que C es una k-categoría y $\otimes$ es un functor k-lineal. Una *k-categoría tensorial trenzada* es un categoría tensorial trenzada $(\mathsf{C},\otimes,e,\alpha,\lambda,\rho,\sigma)$ tal que $(\mathsf{C},\otimes,e,\alpha,\lambda,\rho)$ es una k-categoría tensorial.

Un functor tensorial $(F,\varphi^0,\varphi^2) : (\mathsf{C},\otimes,e,\alpha,\lambda,\rho) \to (\mathsf{C}',\otimes',e',\alpha',\lambda',\rho')$ entre k-categorías tensoriales es un functor de categorías tensoriales tal que $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ es un functor k-lineal.

A.3. Categorías exactas

A.3.1. Si C es una categoría aditiva, un par (i,d) de flechas componibles

$$x \xrightarrow{i} y \xrightarrow{d} z$$

de flechas composibles es *exacto* si i es un núcleo para d y d es un conúcleo para i. En particular, esto implica que i es un monomorfismo y que d es un epimorfismo.

A.3.2. Consideremos un par $(\mathsf{C},\mathscr{E})$ en el que C es una categoría aditiva y $\mathscr{E}$ es una clase de pares (i,d) de pares exactos de flechas de C; una flecha de C es un *monomofismo admisible* si aparece como primera componente de un par de $\mathscr{E}$ y es una *epimorfismo admisible* si aparece como segunda componente de un par de $\mathscr{E}$. Decimos que $(\mathsf{C},\mathscr{E})$ es una *categoría exacta*[1] si

(Ex 0) La clase $\mathscr{E}$ es cerrada por isomorfismos: si $(i,d)\in\mathscr{E}$ y tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "i"] \arrow[d] & y \arrow[r, "d"] \arrow[d] & z \arrow[d] \\ x' \arrow[r, "i'"] & y' \arrow[r, "d'"] & z' \end{tikzcd}$$

en C en el que las fechas verticales son isomorfismos, entonces $(i',d')\in\mathscr{E}$.

(Ex 1) El morfismo identidad id_0 del objeto nulo $0\in\mathsf{C}$ es un monomorfismo admisible.

(Ex 2) La clase de los monomorfismos admisibles es cerrada por composición: si $i:x\to y$ e $i':y\to z$ son monomorfismos admisibles, entonces $i'\circ i:x\to z$ es un monomorfismos admisible.

(Ex 3) Si $i:x\to y$ es un monomorfismo admisible y $f:x\to x'$ es un morfismo de C, existe un diagrama cocartesiano

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & y \arrow[d, "f'"] \\ x' \arrow[r, "i'"] & y' \end{tikzcd}$$

en el que i' es un monomorfismo admisible.

(Ex 3^{op}) Si $d:x\to y$ es un epimorfismo admisible y $g:y'\to y$ es un morfismo de C, existe un diagrama cartesiano

$$\begin{tikzcd} x' \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "g'"'] & y' \arrow[d, "g"] \\ x \arrow[r, "d"] & y \end{tikzcd}$$

en el que d' es un epimorfismo admisible.

[1] Esta noción es debida a Daniel Quillen [Qui75], aunque la definición que presentamos, más eficiente que la original, es debida a Bernhard Keller [Kel90]

A.3.3. Si $(\mathsf{C},\mathscr{E})$ es una categoría exacta y $(i,d)\in\mathscr{E}$, decimos que el diagrama

$$0\longrightarrow x\xrightarrow{\ i\ }y\xrightarrow{\ d\ }z\longrightarrow 0$$

es una *sucesión exacta corta $\mathscr{E}$-admisible*.

A.3.4. Un *functor exacto* $F:(\mathsf{C},\mathscr{E})\to(\mathsf{C}',\mathscr{E}')$ entre categorías exactas $(\mathsf{C},\mathscr{E})$ y $(\mathsf{C}',\mathscr{E}')$ es un functor $F:\mathsf{C}\to\mathsf{C}'$ aditivo tal que siempre que $(i,d)\in\mathscr{E}$ se tiene que $(Fi,Fd)\in\mathscr{E}'$.

A.3.5. Es claro que la clase de las categorías exactas cuyas subcategorías aditivas subyacentes son esencialmente pequeñas forman una categoría, a la que escribimos excat.

{p:ex:min} **A.3.6. Proposición.** *Sea C una categoría aditiva y sea $\mathscr{E}_0$ la clase de todos los pares (i,d) de flechas de C tales que la sucesión exacta*

$$0\longrightarrow x\xrightarrow{\ i\ }y\xrightarrow{\ d\ }z\longrightarrow 0$$

se parte en C. Entonces $(\mathsf{C},\mathscr{E}_0)$ es una categoría exacta. Si $(\mathsf{C},\mathscr{E})$ es otra categoría exacta que tiene a C como categoría aditiva subyacente, entonces $\mathscr{E}_0\subseteq\mathscr{E}$. Además, si $(\mathsf{C}',\mathscr{E}')$ es una categoría exacta y $F:\mathsf{C}\to\mathsf{C}'$ es un functor aditivo, entonces $F:(\mathsf{C},\mathscr{E}_0)\to(\mathsf{C}',\mathscr{E}')$ es un functor exacto.

{p:ex:max} **A.3.7. Proposición.** *Sea C una categoría abeliana y sea $\mathscr{E}_1$ la clase de todos los pares exactos de flechas (i,d) de C. Entonces $(\mathsf{C},\mathscr{E}_1)$ es una categoría exacta, a la que llamamos la* estructura exacta maximal *de C. Si $(\mathsf{C},\mathscr{E})$ es otra categoría exacta que tiene a C como categoría aditiva subyacente, entonces $\mathscr{E}\subseteq\mathscr{E}_1$.*

A.4. Grupos y anillos de Grothendieck

A.4.1. *El grupo de Grothendieck de una categoría exacta*

A.4.1.1. Sea C una categoría esencialmente pequeña.

A.4.1.2. Si $x\in\mathsf{C}$, notemos $[x]_{\mathsf{C}}$ a la clase de isomorfismo de x en C. Cuando la categoría C pueda deducirse del contexto, escribimos simplemente $[x]$.

A.4.1.3. Sea $L(\mathsf{C})$ el grupo abeliano libre generado por el conjunto de clases de isomorfismo de objetos de C.

A.4.1.4. Si C' es otra categoría esencialmente pequeña y $F:\mathsf{C}\to\mathsf{C}'$ es un functor, entonces hay un único morfismo de grupos $L(F):L(\mathsf{C})\to L(\mathsf{C}')$ tal que $L(F)([x])=[F(x)]$ para todo $x\in\mathsf{C}$. Es inmediado verificar que de esta forma obtenemos un functor $L:\mathsf{cat}\to\mathsf{Ab}$ de la categoría de las categorías esencialmente pequeñas a la de los grupos abelianos.

A.4.1.5. Supongamos ahora que $(\mathsf{C},\mathscr{E})$ es una categoría exacta y sea $R(\mathsf{C},\mathscr{E})$ el subgrupo de $L(\mathsf{C})$ generado por los elementos de la forma $[x]-[x']-[x'']$ para cada sucesión exacta corta $\mathscr{E}$-admisible

$$0\longrightarrow x'\xrightarrow{\ i\ }x\xrightarrow{\ d\ }x''\longrightarrow 0$$

de C. Sea, finalmente, $K(\mathsf{C},\mathscr{E})=L(\mathsf{C})/R(\mathsf{C},\mathscr{E})$.

A.4.1.6. Si $V\in\mathsf{C}$, notamos $[\![V]\!]_{\mathsf{C},\mathscr{E}}$ a la imagen de $[V]_{\mathsf{C}}$ en $K(\mathsf{C},\mathscr{E})$. Escribiremos simplemente $[\![V]\!]$ siempre y cuando el contexto implique que esto no introduce ambiguedades.

{p:kcl:oplus} **A.4.1.7.** Si $x, y \in \mathsf{C}$, entonces la sucesión exacta corta partida evidente

$$0 \longrightarrow x \longrightarrow x \oplus y \longrightarrow y \longrightarrow 0$$

está en $\mathscr{E}$ de acuerdo a **A.3.6**, así que $[\![x \oplus y]\!] = [\![x]\!] + [\![y]\!]$.

{p:k:diff} **A.4.1.8.** Si $\xi \in K(\mathsf{C}, \mathscr{E})$, entonces existen $x, y \in \mathsf{C}$ tales que $\xi = [\![x]\!] - [\![y]\!]$. En efecto, existen $n \in \mathbb{N}_0$, $z_1, \ldots, z_n \in \mathsf{C}$ y $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z} \setminus 0$ tales que $\xi = \sum_{i=1}^{n} m_i [\![z_i]\!]$ en $K(\mathsf{C}, \mathscr{E})$. Si ponemos $I^+ = \{i \in \{1, \ldots, n\} : m_i > 0\}$, $x = \bigoplus_{i \in I^+} z_i^{\oplus m_i}$ e $y = \bigoplus_{i \in I \setminus I^+} z_i^{\oplus(-m_i)}$, entonces, de acuerdo a **A.4.1.7**, tenemos que $\sum_{i \in I^+} m_i [z_i] = [\![x]\!]$ y $\sum_{i \in I \setminus I^+} m_i [\![z_i]\!] = -[y]$, así que $\xi = [\![x]\!] - [\![y]\!]$, como queríamos.

A.4.1.9. Como $[\![x \oplus z]\!] - [\![y \oplus z]\!] = [\![x]\!] - [\![y]\!]$ cualesquiera sean $x, y, z \in \mathsf{C}$, es claro que la escritura obtenida en **A.4.1.8** de un elemento de $K(\mathsf{C}, \mathscr{E})$ como diferencia de clases de objetos de C no es única. Pero ésta no es la única forma en que esa unicidad puede fallar. Un ejemplo de un caso extremo es la siguiente proposición:

Proposición. *Sea k un cuerpo, κ un cardinal infinito y sean ${}_k\mathsf{Mod}^{\leq\kappa}$ y ${}_k\mathsf{Mod}^{<\kappa}$ las categorías abelianas de los k-espacios vectoriales de dimensión a lo sumo κ y de dimensión estrictamente menor que κ, respectivamente, dotadas de sus estructuras maximales de categorías exactas de* **A.3.7**. *Entonces es $K({}_k\mathsf{Mod}^{\leq\kappa}) = 0$ y, si $\kappa > \aleph_0$, también es $K({}_k\mathsf{Mod}^{<\kappa}) = 0$*

Aquí nos restringimos a la categoría ${}_k\mathsf{Mod}^{\kappa}$ en lugar de considerar directamente la categoría completa ${}_k\mathsf{Mod}$ de todos los k-espacios vectoriales, porque esta última no es esencialmente pequeña, así que nuestras construcciones no se aplican a ella. Notemos además que si κ es finito, ninguna de las dos categorías consideradas en el enunciado es aditiva. Por otro lado, observemos que la conclusión del enunciado es falsa para el caso excluido: es $K({}_k\mathsf{Mod}^{<\aleph_0}) \cong \mathbb{Z}$. Esto es consecuencia inmediata de **A.4.3.4**.

Demostración. Sea V un k-espacio vectorial. Hay una sucesión exacta corta evidente

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow V^{(\mathbb{N}_0)} \longrightarrow V^{(\mathbb{N})} \longrightarrow 0$$

en la categoría ${}_k\mathsf{Mod}$ de todos los espacios vectoriales. Si $V \in {}_k\mathsf{Mod}^{\leq\kappa}$ o si $\kappa > \aleph_0$ y $V \in {}_k\mathsf{Mod}^{<\kappa}$, esta sucesión exacta es de hecho una sucesión exacta en ${}_k\mathsf{Mod}^{\leq\kappa}$ o en ${}_k\mathsf{Mod}^{<\kappa}$, respectivamente, así que en esos casos tenemos que $[\![V^{(\mathbb{N}_0)}]\!] = [\![V]\!] + [\![V^{(\mathbb{N})}]\!]$ en $K({}_k\mathsf{Mod}^{\leq\kappa})$ o en $K({}_k\mathsf{Mod}^{<\kappa})$, respectivamente. Como, por supuesto $V^{(\mathbb{N}_0)} \cong V^{(\mathbb{N})}$, en ambos casos tenemos que $[\![V^{(\mathbb{N}_0)}]\!] = [\![V^{(\mathbb{N})}]\!]$ y vemos que $[\![V]\!] = 0$. La proposición sigue inmediatamente de esto. □

A.4.1.10. Sea ahora $F : (\mathsf{C}, \mathscr{E}) \to (\mathsf{C}', \mathscr{E}')$ un functor exactos entre categorías exactas esencialmente pequeñas y sea $L(F) : L(\mathsf{C}) \to L(\mathsf{C}')$ el morfismo inducido por el functor subyacente. Si

$$0 \longrightarrow x' \longrightarrow x \longrightarrow x'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta $\mathscr{E}$-admisible en C, la exactitud de F implica que su imagen

$$0 \longrightarrow F(x') \longrightarrow F(x) \longrightarrow F(x'') \longrightarrow 0$$

en C' es una sucesión exacta corta $\mathscr{E}'$-admisible, y entonces

$$L(F)([x] - [x'] - [x'']) = [F(x)] - [F(x')] - [F(x'')] \in R(\mathsf{C}', \mathscr{E}')$$

Vemos entonces que $L(F)(R(\mathsf{C},\mathscr{E})) \subseteq R(\mathsf{C}',\mathscr{E}')$ y, en consecuencia, que $L(F)$ induce un morfismo de grupos $K(F,\mathscr{E},\mathscr{E}') : K(\mathsf{C},\mathscr{E}) \to K(\mathsf{C}',\mathscr{E}')$, que notamos simplemente $K(F)$ cuando esto no introduce ambigüedades. De esta forma obtenemos un functor $K : \mathsf{excat} \to \mathsf{Ab}$, como es fácil verificar.

Notemos que $K(F,\mathscr{E},\mathscr{E}')(\llbracket x \rrbracket_{\mathsf{C},\mathscr{E}}) = \llbracket F(x) \rrbracket_{\mathsf{C}',\mathscr{E}'}$ para todo $x \in \mathsf{C}$ y que esta condición determina a $K(F,\mathscr{E},\mathscr{E}')$ unívocamente.

A.4.2. *El anillo de Grothendieck de una categoría exacta tensorial*

A.4.2.1. Digamos que una 7-upla $(\mathsf{C},\mathscr{E},\otimes,e,\alpha,\lambda,\rho)$ es una *categoría exacta tensorial* si $(\mathsf{C},\mathscr{E})$ es una categoría exacta, si $(\mathsf{C},\otimes,e,\alpha,\lambda,\rho)$ es una categoría tensorial y si el functor $(-)\otimes(-) : \mathsf{C}\times\mathsf{C} \to \mathsf{C}$ es un exacto.

A.4.2.2. Un *functor exacto tensorial*

$$(F,\varphi^0,\varphi^2) : (\mathsf{C},\mathscr{E},\otimes,e,\alpha,\lambda,\rho) \to (\mathsf{C}',\mathscr{E}',\otimes',e',\alpha',\lambda',\rho')$$

entre categorías exactas tensoriales $(\mathsf{C},\mathscr{E},\otimes,e,\alpha,\lambda,\rho)$ y $(\mathsf{C}',\mathscr{E}',\otimes',e',\alpha',\lambda',\rho')$ es un functor tensorial $(F,\varphi^0,\varphi^1) : (\mathsf{C},\otimes,e,\alpha,\lambda,\rho) \to (\mathsf{C}',\otimes',e',\alpha',\lambda',\rho')$ cuyo functor subyacente F es un functor exacto $F : (\mathsf{C},\mathscr{E}) \to (\mathsf{C}',\mathscr{E}')$.

A.4.2.3. Es inmediato verificar que las categorias exactas tensoriales cuyas categorías subyacentes son esencialmente pequeñs y los functores entre ellas forman una categoría, a la que notamos $\mathsf{excat}^{\otimes}$.

{p:k:ot} **A.4.2.4. Proposición.** *Sea $(\mathsf{C},\mathscr{E},\otimes,e,\alpha,\lambda,\rho)$ una categoría exacta tensorial cuya categoría subyacente C es esencialmente pequeña. Entonces $K(\mathsf{C},\mathscr{E})$ es de manera única un anillo en el que $\llbracket e \rrbracket$ es el elemento neutro y siempre que x, $y \in \mathsf{C}$ es*

$$\llbracket x \rrbracket \cdot \llbracket y \rrbracket = \llbracket x \otimes y \rrbracket.$$

Si existe un isomorfismo natural $\sigma : x\otimes y \to y \otimes x$ de manera tal que $(\mathsf{C},\otimes,e,\alpha,\lambda,\rho,\sigma)$ es una categoría tensorial trenazada, entonces el anillo $K(\mathsf{C},\mathscr{E})$ es conmutativo.

Demostración. Es claro que hay única aplicación $\mathbb{Z}$-bilineal $\cdot : L(\mathsf{C}) \times L(\mathsf{C}) \to L(\mathsf{C})$ tal que $[x]\cdot[y] = [x\otimes y]$ para cada x, $y \in \mathsf{C}$. Con esa operación, $L(\mathsf{C})$ es un anillo. En efecto, como $e\otimes x \cong x \cong x \otimes e$ para todo $x \in \mathsf{C}$, es $[e]\cdot[x] = [x] = [x]\cdot[e]$ para cada tal x y $\{[x] : x \in \mathsf{C}\}$ genera a $L(\mathsf{C})$, así que $[e]$ es un elemento identidad. Por otro lado, si x, y, $z \in \mathsf{C}$ el isomorfismo $(x\otimes y)\otimes z \cong x \otimes (y \otimes z)$ da una igualdad $([x]\cdot[y])\cdot[z] = [x]\cdot([y]\cdot[z])$ y, como antes, vemos que $\cdot$ es asociativo.

Si

$$0 \longrightarrow x' \longrightarrow x \longrightarrow x'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta $\mathscr{E}$-admisible en C e $y \in \mathsf{C}$, la hipótesis de exactitud de $\otimes$ implica que

$$0 \longrightarrow y\otimes x' \longrightarrow y \otimes x \longrightarrow y \otimes x'' \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow x'\otimes y \longrightarrow x \otimes y \longrightarrow x'' \otimes y \longrightarrow 0$$

también son sucesiones exactas cortas $\mathscr{E}'$-admisibles en C', de manera que

$$[y]\cdot([x]-[x']-[x'']) = [y\otimes x] - [y\otimes x'] - [y \otimes x''] \in R(\mathsf{C},\mathscr{E})$$

y

$$([x]-[x']-[x''])\cdot[y] = [x\otimes y] - [x'\otimes y] - [x''\otimes y] \in R(\mathsf{C},\mathscr{E}).$$

Recordando la definición de $R(\mathsf{C}, \mathscr{E})$, es claro entonces que $R(\mathsf{C}, \mathscr{E})$ es un ideal bilátero en $L(\mathsf{C})$. Esto implica que $K(\mathsf{C}, \mathscr{E})$ hereda de $L(\mathsf{C})$ una estructura de anillo que satisface las dos condiciones del enunciado. Más aún, la construcción hecha implica que esta estructura está unívocamente determinada por esas condiciones. Finalmente, es claro que si existe un isomorfismo σ como en el enunciado que $L(\mathsf{C})$ es conmutativo, así que su cociente $K(\mathsf{C}, \mathscr{E})$ también lo es en ese caso. □

A.4.2.5. La estructura de anillo de $K(\mathsf{C}, \mathscr{E})$ construida en **A.4.2.4** depende de la estructura de categoría tensorial considerada sobre la categoría subyacente C, aunque nuestra notación no lo deje explícito.

Más precisamente, si $(\mathsf{C}, \mathscr{E}, \otimes, e, \alpha, \lambda, \rho)$ y $(\mathsf{C}, \mathscr{E}, \otimes, e', \alpha', \lambda', \rho')$ son dos categorías exactas tensoriales con la misma categoría exacta esencialmente pequeña $(\mathsf{C}, \mathscr{E})$ subyacente y el mismo functor exacto $\otimes$, entonces las estructuras de anillos correspondientes sobre $K(\mathsf{C}, \mathscr{E})$ coinciden.

{p:k:ot:f} **A.4.2.6. Proposición.** *Si* $(F, \varphi^0, \varphi^2) : (\mathsf{C}, \mathscr{E}, \otimes, e, \alpha, \lambda, \rho) \to (\mathsf{C}', \mathscr{E}', \otimes', e', \alpha', \lambda', \rho')$ *es un functor exacto tensorial entre categorias exactas tensoriales tales que las categorías subyacentes* C *y* C' *son esencialmente pequeñas, entonces el morfismo*

$$K(F, \mathscr{E}, \mathscr{E}') : K(\mathsf{C}, \mathscr{E}) \to K(\mathsf{C}', \mathscr{E}')$$

inducido por el functor exacto subyacente $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ *es un morfismo de anillos.*

Demostración. Dada la forma en que fue construida la estructura de anillo sobre $K(\mathsf{C}, \mathscr{E})$ y $K(\mathsf{C}', \mathscr{E}')$ en la prueba de **A.4.2.4**, basta mostrar que el morfismo de grupos abelianos $L(F) : L(\mathsf{C}) \to L(\mathsf{C}')$ es un morfismo de anillos. Esto último es consecuencia de que

$$L(F)([e]) = [F(e)] = [e']$$

ya que $\varphi^0 : e' \to F(e)$ es un isomorfismo, y de que

$$L(F)([x] \cdot [y]) = L(F)([x \otimes y]) = [F(x \otimes y)] = [F(x) \otimes' F(y)]$$

ya que $\varphi^2_{x,y} : F(x) \otimes' F(y) \to F(x \otimes y)$ es un isomorfismo, y esto es

$$= [F(x)] \cdot [F(y)] = L(F)([x]) \cdot L(F)([y])$$ □

A.4.3. *El grupo de Grothendieck de una categoría abeliana semisimple*

A.4.3.1. Consideramos aquí a cada categoría abeliana dotada de su estructura maximal de categoría exacta construida en **A.3.7**.

{p:k:delta} **A.4.3.2. Proposición.** *Sea* C *una categoría abeliana en la que todo objeto admite una serie de composición y sea* $t \in \mathsf{C}$ *un objeto simple y proyectivo. Sea* $\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(t)$ *es el anillo de división de endomorfismos de* t *en* C *y para cada* $x \in \mathsf{C}$ *dotemos a* $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(t, x)$ *de su estructura canónica de* $\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(t)$*-espacio vectorial derecho.*

Para cada $x \in \mathsf{C}$*, entonces, el* $\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(t)$*-espacio vectorial* $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(t, x)$ *tiene dimensión finita. Más aún, existe exactamente una forma lineal* $\delta_t : K(\mathsf{C}) \to \mathbb{Z}$ *tal que*

$$\delta_t([\![x]\!]) = \dim_{\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(s)} \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(t, x),$$

para cada $x \in \mathsf{C}$.

Demostración. Sea $x \in \mathsf{C}$. Para ver que $\dim_{\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(s)} \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(t, x) < \infty$, hagamos inducción sobre la longitud $\ell(x)$ de una serie de composición para x en C. Si $\ell(x) = 1$, entonces x es un objeto simple y o bien x es isomorfo a t y, en ese caso, $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(s, t)$ tiene claramente dimensión 1 sobre $\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(t)$ o, por el contrario, x no es isomorfo a t y $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(t,x)=0$ de acuerdo al lema de Schur. Si, en general, $\ell(x)=n>1$, entonces existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow x' \longrightarrow x \longrightarrow y \longrightarrow 0$$

en C en la que $\ell(x')=n-1$ e y es simple. Inductivamente podemos suponer que $\dim_{\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(t)} \mathsf{hom}(t,x')<\infty$ y ya sabemos que $\dim_{\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(t)} \mathsf{hom}(t,y)<\infty$. Por otro lado, como t es proyectivo, la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(t,x') \longrightarrow \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(t,x) \longrightarrow \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(t,y) \longrightarrow 0$$

de grupos abelianos es, de hecho, una sucesión exacta de $\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(t)$-espacios vectoriales derechos, y vemos que

$$\begin{aligned}\dim_{\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(t)} \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(t,x) &= \dim_{\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(t)} \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(t,x') + \dim_{\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(t)} \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(t,y)\\ &< \infty.\end{aligned}$$

Esto prueba la primera parte del enunciado.

Podemos ahora definir un morfismo de grupos $\bar{\delta}_t : L(\mathsf{C}) \to \mathbb{Z}$ tal que

$$\bar{\delta}_t([x]) = \dim_{\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(t)} \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(t,x)$$

para cada $x \in \mathsf{C}$. Si

$$0 \longrightarrow x' \longrightarrow x \longrightarrow x'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta en C y le aplicamos el functor exacto $\mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(t,-)$, obtenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(t,x') \longrightarrow \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(t,x) \longrightarrow \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(t,x'') \longrightarrow 0$$

de $\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(t)$-espacios vectoriales derechos, de manera que es

$$\dim_{\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(t)} \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(t,x) = \dim_{\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(t)} \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(t,x') + \dim_{\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(t)} \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(t,x'')$$

y entonces $\bar{\delta}_t([x]-[x']-[x''])=0$. Esto nos dice que $\bar{\delta}_t(R(\mathsf{C}))=0$ y, en particular, que $\bar{\delta}_t$ induce un morfismo $\delta_t : K(\mathsf{C}) \to \mathbb{Z}$ tal que $\bar{\delta}_t([\![x]\!]) = \dim_{\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(t)} \mathsf{hom}_{\mathsf{C}}(t,x)$ para cada $x \in \mathsf{C}$. La unicidad de δ_t es clara, en vista de la construcción hecha. □

{p:k:ss:0} **A.4.3.3. Proposición.** *Sea* C *una categoría abeliana en la que todo objeto admite una serie de composición. Si* $\mathscr{S}$ *es un conjunto de objetos simples y proyectivos de* C *no isomorfos dos a dos y* $\mathscr{B}=\{[\![s]\!] : s \in \mathscr{S}\}$, *entonces* $\mathscr{B}$ *es un subconjunto linealmente independiente en* $K(\mathsf{C})$.

Demostración. En A.4.3.2 construimos una familia $(\delta_t : K(\mathsf{C}) \to \mathbb{Z})_{t\in\mathscr{S}}$ de morfismos de grupos tales que

$$\delta_t([\![s]\!]) = \begin{cases} 1, & \text{si } s=t; \text{ y}\\ 0, & \text{en caso contrario.}\end{cases}$$

La proposición sigue inmediatamente de esto. □

{p:k:ss} **A.4.3.4. Corolario.** *Sea* C *una categoría abeliana esencialmente pequeña. Si* C *es semisimple y* $\mathscr{S}$ *es un sistema completo de representantes para las clases de isomorfismo de los objetos simples de* C, *entonces el conjunto* $\mathscr{B}=\{[\![s]\!] : s\in\mathscr{S}\}$ *es una base de* $K(\mathsf{C})$.

Notemos que la base $\mathscr{B}$ no depende de los representantes elegidos para las clases de isomorfismo de objetos simples.

Demostración. Como C es semisimple, todo objeto de $\mathscr{S}$ es proyectivo. En vista de **A.4.3.3**, entonces, el conjunto $\mathscr{B}$ es linealmente independiente en $K(\mathsf{C})$. Por otro lado, si $x \in \mathsf{C}$, existen objetos simples $s_1, \dots, s_n$ y enteros $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ tales que $x \cong \bigoplus_{i=1}^n s_i^{m_i}$ y, en particular, $[\![x]\!] = \sum_{i=1}^n m_i [\![s_i]\!]$. Esto muestra que $\mathscr{B}$ también genera a $K(\mathsf{C})$, así que es un base. $\square$

{p:k:fiel} **A.4.3.5. Corolario.** *Sea C una categoría abeliana esencialmente pequeña. Supongamos que C es semisimple y sean $x, y \in \mathsf{C}$. Si $[\![x]\!] = [\![y]\!]$, entonces $x \cong y$.*

Demostración. Sea $\mathscr{S}$ un conjunto completo de representantes de las clases de isomorfismo de los objetos simples de C. La hipótesis de que C es semisimple implica que existen $n \in \mathbb{N}_1$, $s_1, \dots, s_n \in \mathscr{S}$ y $u_1, \dots, u_n$ tales que los elementos de $\{s_1, \dots, s_n\}$ son no isomorfos dos a dos y $x \cong \bigoplus_{i=1}^n s_i^{\oplus u_i}$. Esto nos dice que

$$[\![x]\!] = \Big[\!\!\Big[\bigoplus_{i=1}^n s_i^{\oplus u_i}\Big]\!\!\Big] = \sum_{i=1}^n u_i [\![s_i]\!]$$

Esto nos dice que si $s \in \mathscr{S}$, el coeficiente de $[\![s]\!]$ en la escritura de $[\![x]\!]$ en la base $\{[\![s]\!] : s \in \mathscr{S}\}$ es precisamente la multiplicidad de s en tanto factor de composición de x. La afirmación del corolario sigue entonces de que la clase de isomorfismo de x queda determinada por las multiplicidades de los objetos simples que aparecen en su serie de composición. $\square$

{p:devissage} **A.4.3.6. Proposición.** (Dévissage) *Consideremos una categoría abeliana C esencialmente pequeña en la que todo objeto admite una serie de composición. Entonces la subcategoría aditiva plena C^{ss} generada por los objetos simples de C es abeliana y el functor de inclusión $F : \mathsf{C}^{\mathsf{ss}} \to \mathsf{C}$ es exacto y el morfismo $K(F) : K(\mathsf{C}^{\mathsf{ss}}) \to K(\mathsf{C})$ inducido por F es un isomorfismo.*

Demostración. Si $x \in \mathsf{C}^{\mathsf{ss}}$, notemos temporariamente $[x]_{\mathsf{C}}$ y $[x]_{\mathsf{C}^{\mathsf{ss}}}$ a los elementos correspondientes a x en $L(\mathsf{C})$ y en $L(\mathsf{C}^{\mathsf{ss}})$, respectivamente, y extendamos esta notación a los diversos grupos que aparecen.

Si $x \in \mathsf{C}$ y

$$0 = x_0 \xrightarrow{\iota_1} x_1 \xrightarrow{\iota_2} x_2 \xrightarrow{\iota_3} \cdots \xrightarrow{\iota_{n-1}} x_{n-1} \xrightarrow{\iota_n} x_n = x$$

es una serie de composición para x en C, entonces para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ hay una sucesión exacta en C

$$0 \longrightarrow x_{i-1} \xrightarrow{\iota_i} x_i \longrightarrow y_i \longrightarrow 0$$

con $y_i \in \mathsf{C}$ simple. En particular, para cada i es $[\![x_i]\!]_{\mathsf{C}} - [\![x_{i-1}]\!]_{\mathsf{C}} = [\![y_i]\!]_{\mathsf{C}}$ y, usando esto, vemos que

$$[\![x]\!]_{\mathsf{C}} = \sum_{i=1}^n \big([\![x_i]\!]_{\mathsf{C}} - [\![x_{i-1}]\!]_{\mathsf{C}}\big) = \sum_{i=1}^b [\![y_i]\!]_{\mathsf{C}} = K(F)\Big(\sum_{i=1}^n [\![y_i]\!]_{\mathsf{C}^{\mathsf{ss}}}\Big).$$

Así, vemos que la imagen de $K(F)$ contiene a todos los elementos $[\![x]\!]_{\mathsf{C}}$ con $x \in \mathsf{C}$ y, en consecuencia, el morfismo $K(F)$ es sobreyectivo.

Sea ahora $\varphi : L(\mathsf{C}) \to K(\mathsf{C}^{\mathsf{ss}})$ el único morfismo de grupos tal que si $x \in \mathsf{C}$ y $x_1, \dots, x_n$ son los factores de composición de x repetidos de acuerdo a su multiplicidad, entonces $\varphi([x]_{\mathsf{C}}) = \sum_{i=1}^n [\![x_i]\!]_{\mathsf{C}^{\mathsf{ss}}}$. Esto está bien definido ya que los factores de composición de x dependen solamente de su clase de isomorfismo $[x]_{\mathsf{C}}$. Por otro lado, si

$$0 \longrightarrow x' \longrightarrow x \longrightarrow x'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta en C y $x'_1, \ldots, x'_n$ y $x''_1, \ldots, x''_m$ son los factores de composición de x' y de x'', respectivamente, es claro que $x'_1, \ldots, x'_n, x''_1, \ldots, x''_m$ son los factores de composición de x. Esto nos dice que $\varphi([x]_{\mathsf{C}} - [x']_{\mathsf{C}} - [x'']_{\mathsf{C}}) = 0$ y, entonces, que es $\varphi(R(\mathsf{C})) = 0$. Vemos así que φ induce un homomorfismo $\bar{\varphi} : K(\mathsf{C}) \to K(\mathsf{C}^{\mathsf{ss}})$ y la construcción hecha implica que $\varphi([\![s]\!]_{\mathsf{C}}) = [\![s]\!]_{\mathsf{C}^{\mathsf{ss}}}$ si s es un objeto semisimple de C. Esta última observación, en particular, implica inmediatamente que $\bar{\varphi} \circ K(F) = \mathrm{id}_{K(\mathsf{C}^{\mathsf{ss}})}$, ya que los elementos de la forma $[\![s]\!]_{\mathsf{C}^{\mathsf{ss}}}$ con $s \in \mathbb{C}$ semisimple generan a $K(\mathsf{C}^{\mathsf{ss}})$. Así, $K(F)$ es un monomorfismo. $\square$

Referencias

[Cay89] Arthur Cayley, *A second memoir upon quantics*, Collected Math. Papers, Vol. 2, Cambridge University Press, New York, 1889, pp. 250–275. ↑27

[Kel90] Bernhard Keller, *Chain complexes and stable categories*, Manuscripta Math. **67** (1990), no. 4, 379–417. MR1052551 (91h:18006) ↑36

[O'H90] Kathleen M. O'Hara, *Unimodality of Gaussian coefficients: a constructive proof*, J. Combin. Theory Ser. A **53** (1990), no. 1, 29–52. MR1031611 (90k:05024) ↑28

[Qui75] Daniel Quillen, *Higher algebraic K-theory*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B. C., 1974), Vol. 1, Canad. Math. Congress, Montreal, Que., 1975, pp. 171–176. MR0422392 (54 #10382) ↑36

[Sch68] Issai Schur, *Vorlesungen über Invariantentheorie*, Bearbeitet und herausgegeben von Helmut Grunsky. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 143, Springer-Verlag, Berlin, 1968 (German). MR0229674 (37 #5248) ↑

[Syl74] James Joseph Sylvester, *Proof of the hitherto undemonstrated fundamental theory of invariants*, Collected Math. Papers, Vol. 3, Chelsea, New York, 1974. ↑27

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Ciudad Universitaria, Pabellón I, Buenos Aires (1428) Argentina.

E-mail address: `mariano@dm.uba.ar`