La forma normal de Jordan de un endomorfismo nilpotente

Mariano Suárez-Alvarez

2 de noviembre, 2005

Sea k un cuerpo arbitrario. Si V es un espacio vectorial de dimensión finita y si $v \in V$ y $f \in \mathrm{End}(V)$, escribimos $\langle v \rangle_f \mathrel{\hat=} \langle \{f^k(v) : k \in \mathbb{N}_0\} \rangle$. Es claro que $\langle v \rangle_f$ es un subespacio f-invariante. Más aún, existe $n \geq 0$ tal que $\mathcal{B} = \{f^k(v) : 0 \leq k < n\}$ es una base de $\langle v \rangle_f$. Esto tiene la consecuencia de que para cada $w \in \langle v \rangle_f$ existe $p \in k[X]$ tal que $w = p(f)(v)$.

Proposición. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $f \in \mathrm{End}(V)$ nilpotente. Entonces existe un conjunto finito $S \subset V$ tal que $V = \bigoplus_{v \in S} \langle v \rangle_f$.*

Demostración. El enunciado es evidente cuando $\dim V = 1$. Supongamos que es cierto para todo endomorfismo nilpotente de todo espacio vectorial de dimensión estríctamente menor que $\dim V$.

Como f es nilpotente, $\mathrm{im}\, f \neq V$ y existe entonces un subespacio $H \subset V$ de codimensión 1 tal que $H \supset \mathrm{im}\, f$. Es claro que H es f-invariante.

Llamemos *candidato* a toda terna (w, S, S') tal que $w \in V \setminus H$, $S \subset V$ es un conjunto finito y $S' \subset S$, y es

$$H = \bigoplus_{v \in S} \langle v \rangle_f, \qquad\qquad f(w) = \sum_{v \in S'} v.$$

Nuestro primer objetivo es mostrar que existen candidatos. Como $f|_H \in \mathrm{End}(H)$ es nilpotente, nuestra hipótesis inductiva implica que existe $T \subset H$ finito tal que $H = \bigoplus_{v \in T} \langle v \rangle_f$. Sea $w \in V \setminus H$ arbitrario. En vista de la elección de H, es claro que $f(w) \in H$, así que para cada $v \in S$ existe $p_v \in k[X]$ tal que $f(w) = \sum_{v \in S} p_v(f)(v)$.

Para cada $v \in S$ hay un polinomio $q_v \in k[X]$ tal que $p_v = p_v(0) + Xq_v$. Pongamos

$$\bar{w} = w - \sum_{v \in S} q_v(f)(v), \qquad \bar{v} = \begin{cases} v, & \text{si } p_v(0) = 0; \\ p_v(0)\, v, & \text{si } p_v(0) \neq 0; \end{cases}$$

$$\bar{S} = \{\bar{v} : v \in S\}; \qquad \bar{S}' = \{\bar{v} \in S : p_v(0) \neq 0\}.$$

Es claro que $\langle \bar{v} \rangle_f = \langle v \rangle_f$ cualquiera sea $v \in S$, así que $H = \bigoplus_{\bar{v} \in \bar{S}} \langle \bar{v} \rangle_f$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} f(\bar{w}) &= f(w) - \sum_{v \in S} (f q_v(f))(v) = \sum_{v \in S} p_v(f)(v) - \sum_{v \in S} (f q_v(f))(v) \\ &= \sum_{v \in S} p_v(0) v = \sum_{\bar{v} \in \bar{S}'} \bar{v}. \end{aligned}$$

Estas dos cosas nos dicen que $(\bar{w}, \bar{S}, \bar{S}')$ es un candidato, y vemos que en particular existen candidatos, como queríamos mostrar.

Consideremos ahora un candidato $C = (w, S, S')$ con $|S'|$ mínimo. Afirmamos que entonces es $|S'| \leq 1$. En efecto, supongamos que este no es el caso, y sean $v_1, v_2 \in S'$ dos elementos distintos. Como

$$\langle v_1 \rangle_f \oplus \langle v_2 \rangle_f = \langle v_1 \rangle_f \oplus \langle v_1 + v_2 \rangle_f,$$

es claro que $\big(w, (S \cup \{v_1 + v_2\}) \setminus \{v_2\}, (S' \cup \{v_1 + v_2\}) \setminus \{v_2\}\big)$ es un candidato que tiene tercera componente menor que la de C, y esto es absurdo.

Hay entonces solamente dos posibilidades: o bien $S' = \emptyset$, y en ese caso $f(w) = 0$, y

$$V = \langle w \rangle_f \oplus \bigoplus_{v \in S} \langle v \rangle_f,$$

o bien $S' = \{v_0\}$, y en ese caso es

$$V = \langle w \rangle_f \oplus \bigoplus_{v \in S \setminus \{v_0\}} \langle v \rangle_f,$$

y vemos que en ambos casos se cumple la afirmación del teorema para f. $\square$

Si $n \geq 1$, sea

$$N_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(k).$$

Teorema. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $f \in \operatorname{End}(V)$ un endomorfismo nilpotente. Entonces existe una base $\mathcal{B}$ de V, un número $r \geq 0$ y números $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r \geq 0$ tales que la matriz de f con respecto a $\mathcal{B}$ es la matriz diagonal de bloques*

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} N_{n_1} & & & \\ & N_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & N_{n_r} \end{pmatrix}$$

Demostración. En vista de la proposición anterior, existe un conjunto finito $S \subset V$ tal que $V = \bigoplus_{v \in S} \langle v \rangle_f$. Cada uno de los sumandos en esta descomposición es f-invariante, así que bastará mostrar que para cada $v \in S$ hay una base de $\langle v \rangle_f$ tal que la matriz de $f|_{\langle v \rangle_f}$ es como en la del enunciado. Pero esto es trivial, ya que si $v \in S$ y $\nu \geq 0$ es el mayor número entero no negativo tal que $f^\nu(v) \neq 0$, entonces $\mathcal{B} = \{v, f(v), \ldots f^\nu(v)\}$ es una base de $\langle v \rangle_f$ tal que

$$\|f|_{\langle v \rangle_f}\|_{\mathcal{B}} = N_\nu.$$ $\square$

Proposición. *Sean* V, $f \in \operatorname{End}(V)$ *y* $r, n_1, \dots, n_r \geq 0$ *como en el teorema. Entonces* $r = \dim \ker f$ *y si* $l \geq 1$,

$$|\{i : n_i \geq l\}| = \dim \ker f^l - \dim \ker f^{l-1}. \tag{1}$$

En particular, si $l \geq 1$,

$$|\{i : n_i = l\}| = -\dim \ker f^{l+1} + 2 \dim \ker f^l - \dim \ker f^{l-1}. \tag{2}$$

Esto nos dice que los números n_i *dependen solamente de* f.

Demostración. Usando la expresión matricial para f obtenida en el teorema, es claro que si $l \geq 0$, es

$$\dim \ker f^l = \sum_{i=1}^{r} \text{mín}\{l, n_i\},$$

de manera que si $l \geq 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} \dim \ker f^l - \dim \ker f^{l-1} &= \sum_{i=1}^{r} \big(\text{mín}\{l, n_i\} - \text{mín}\{l-1, n_i\}\big) \\ &= |\{i : n_i \geq l\}|. \end{aligned}$$

Esto es (1). Ahora, si $l \geq 1$,

$$|\{i : n_i = l\}| = |\{i : n_i \geq l\}| - |\{i : n_i \geq l+1\}|$$

y, por lo ya hecho, esto es

$$= -\dim \ker f^{l+1} + 2 \dim \ker f^l - \dim \ker f^{l-1}.$$

Esto es (2). $\square$